Федеральное агентство по образованию
Рубцовский индустриальный институт
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Н.А. Чернецкая

ПЛАНИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения
по дисциплинам «Основы научных исследований»,
«Планирование и математическая обработка результатов
экспериментов» по специальностям «Автомобили
и автомобильное хозяйство», «Сельскохозяйственные
машины и оборудование» и «Автомобиле- и тракторостроение»

Рубцовск 2009

УДК 629.114.4

Чернецкая Н.А. **ПЛАНИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ:** Учебное пособие для студентов всех форм обучения по дисциплинам «Основы научных исследований», «Планирование и математическая обработка результатов экспериментов» по специальностям «Автомобили и автомобильное хозяйство», «Сельскохозяйственные машины и оборудование» и «Автомобиле- и тракторостроение» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2009. - 79 с.

Предназначено в качестве теоретического материала, подкрепленного вопросами и практическими заданиями, для студентов, изучающих дисциплины «Основы научных исследований», «Планирование и математическая обработка результатов экспериментов». Содержит основные части теории, практический пример, тесты для самоконтроля, вопросы для контроля, варианты индивидуальных расчетных заданий, а также библиографический список.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры «АиАХ»
Рубцовского индустриального
института.
Протокол № 2 от 30.04.09.

Рецензент: к.т.н., доцент А.С. Демидов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В научном исследовании большая роль принадлежит эксперименту. Он представляет собой организованное на строго научных основах испытание изучаемого объекта, поставленного в определенные условия, позволяющие наблюдать явление, фиксировать необходимые показатели и управлять данным процессом. Эксперимент можно осуществить на специальных стендах или моделях, в лабораторных условиях или непосредственно на производстве, используя в натуре изучаемый объект.

Развитие математической статистики и ее широкое проникновение в технику и во многие сферы науки дало возможность создать математическую теорию эксперимента или, точнее, теорию экспериментальных исследований. С помощью этой теории решаются многие вопросы экспериментальных исследований, в том числе математическое планирование эксперимента, оптимизация технологических процессов и др.

При этом сочетание слов «планирование эксперимента» не означает организацию проведения экспериментальной части исследования в общепринятом смысле, предусматривающую выполнение определенного объема работ по периодам времени. ***Планирование эксперимента*** — это метод построения математических моделей различных управляемых процессов, позволяющий повысить производительность труда исследователей за счет значительного сокращения числа опытов. Это обеспечивает сокращение времени и средств на проведение эксперимента [1].

При изучении сложных явлений или процессов, в ходе которых участвуют и взаимодействуют многие факторы, и при изменяющихся условиях задача оптимизации этих процессов становится многофакторной, экстремальной, решать ее приходится при неполном знании самого механизма рассматриваемых явлений, не поддающихся описанию аналитическими методами.

Сущность метода математического планирования многофакторного эксперимента заключается в том, что на основе ограниченного количества проведенных экспериментов устанавливается корреляционная зависимость между показателями процесса и выходными параметрами продукции. Область оптимума достигается путем последовательного проведения небольших серий опытов, в которых по специальным правилам — алгоритмам — варьируются все факторы. Каждая последующая серия опытов планируется на основе результатов математической обработки предыдущей.

Планирование эксперимента может быть применено для решения большого количества задач, например, для определения оптимальных режимов работы автотранспортных средств, оптимальных режимов восстановления деталей различными технологическими способами, оптимальных сроков службы машин и деталей, оптимальной себестоимости восстановленных деталей и многих других. ***Экстремальным*** называется такой эксперимент, которым предусматривается решение задач оптимизации.

Формально основной задачей планирования эксперимента является получение статической математической модели объекта исследования в виде полинома (уравнение регрессии), обычно первой или второй степени.

В общем виде математическая модель представляет собой уравнение, выражающее зависимость параметра оптимизации (y) от факторов $(x_1, x_2, ..., x_k)$:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Приведенная функция получила название ***функции отклика***.

Целью настоящего учебного пособия является рассмотрение комплекса вопросов построения математической модели и ее оценки. В учебном пособии, в частности, рассматриваются:

1) предварительное изучение объекта;
2) выбор параметра оптимизации, выявление действующих факторов и построение модели по результатам опытов;
3) методы оценки адекватности модели и интерпретация, т.е. распознавание ее геометрического облика.

Влияние нестабильности условий протекания процессов эксплуатации и обслуживания автотранспортных средств, ремонта и восстановления агрегатов, узлов и деталей, обусловленное действием множества «неуправляемых» факторов, может быть «сглажено» применением методов планирования эксперимента в условиях неоднородностей [8].

Теоретический материал учебного пособия подкреплен практическим примером, а также вопросами, отвечая на которые студент контролирует степень изучения материала. Кроме того, в учебном пособии представлены инвариантные практические задания, решение которых формирует теоретические знания и практические навыки.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Большинство научных исследований снизано с экспериментом. Эксперименты проводятся в дорожных условиях, в ремонтных мастерских, на автотранспортных предприятиях, эксплуатирующих и обслуживающих автомобильную технику, в лабораториях автомобильных научно-исследовательских институтов и вузов страны и т.д. В эксперименте участвуют автомобили и водители, дороги, энергетические установки, агрегаты, узлы и детали автомобиля, разнообразные технологические процессы обслуживания и ремонта автомобилей и т.п.

Эксперимент может быть физическим, психологическим или модельным. Он может непосредственно проводиться па объекте или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой.

Если абстрактная математическая модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте может быть заменен экспериментом на модели. В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели. Можно получать новые сведения об объекте, экспериментируя на модели, если она достаточно точно описывает объект.

Эксперимент занимает центральное место в науке. Однако если научные исследования организуются и проводятся хаотично, то их коэффициент полезного действия может быть порядка 2%. Для того чтобы повысить эффективность исследований, требуется нечто совершенно иное. Одним из возможных путей является применение математических методов, построение математической теории планирования эксперимента.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью [1]**.** При этом существенно следующее:

- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам — алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Задачи, для решения которых может использоваться планирование эксперимента, чрезвычайно разнообразны.

Все многообразие решаемых исследовательских задач объединяется в три основных вида: выявление количественных зависимостей между параметрами объекта или процесса; отыскание оптимальных параметров агрегата, узла и деталей автомобиля и протекания процессов восстановления деталей автомобилей; выбор оптимального состава эксплуатационных материалов и т.д. Под ***оптимальностью*** следует понимать получение наилучших результатов в конкретных условиях. Задачи первого вида называются интерполяционными, а второго и третьего — экстремальными. ***Интерполяционные задачи*** требуют отыскания лишь зависимости между параметром оптимизации и факторами, в той или иной мере влияющими на него. ***Экстремальные задачи*** требуют отыскания экстремума функции, описывающей с достаточной точностью изучаемый объект или процесс.

Поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, выбор существенных факторов, оценка и уточнение констант теоретических моделей (например, кинетических), выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме явлений, исследование диаграмм состав — свойство. Там, где есть эксперимент, имеет место и наука о его проведении — планирование эксперимента.

Поиск оптимальных условий считается одной из наиболее распространенных научно-технических задач. Они возникают в тот момент, когда установлена возможность проведения процесса и необходимо найти наилучшие (оптимальные в некотором смысле) условия его реализации.

Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется ***экстремальным***. Это название связано с аналогией между оптимизацией и поиском экстремума некоторой функции. С помощью таких экспериментов решаются экстремальные и интерполяционные задачи.

Первое важное понятие — «объект исследования». Для описания объекта исследования удобно пользоваться представлением о кибернетической системе, которая схематически изображена на рисунке 1. Иногда такую кибернетическую систему называют «черным ящиком» [5, 6].

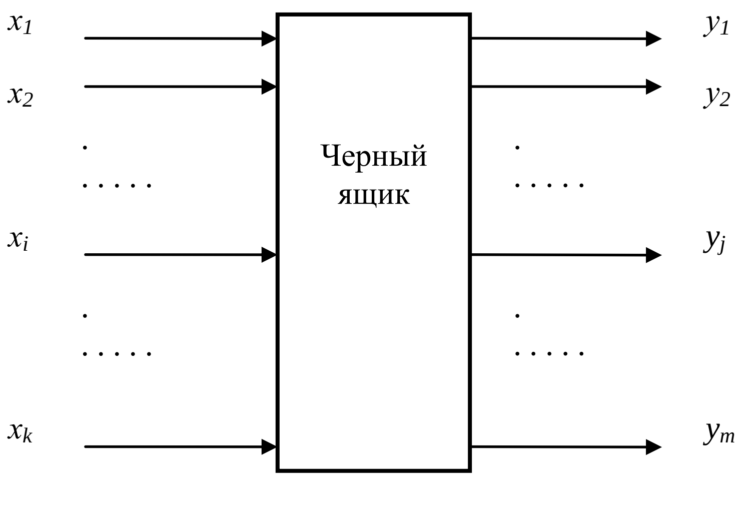

Рис. 1. Схема «черного ящика»

Стрелки справа изображают численные характеристики целей исследования, обозначаются буквой игрек и называются ***параметрами оптимизации*** (другие названия: критерий оптимизации, целевая функция, выход «черного ящика» и т.д.).

Для проведения эксперимента необходимо иметь возможность воздействовать на поведение «черного ящика». Все способы такого воздействия обозначаются буквой икс и называются ***факторами*** (другие названия: входы «черного ящика»).

При решении задач используются математические модели объекта исследования. Под ***математической моделью*** понимают уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде записывается так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Такая функция называется ***функцией отклика***.

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений. Такие значения называются ***уровнями***. Фактор способен принимать бесконечно много значений (непрерывный ряд). Однако на практике точность, с которой устанавливается некоторое значение, не беспредельна. Поэтому всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней. Это соглашение существенно облегчает построение «черного ящика» и эксперимента, а также упрощает оценку их сложности.

Фиксированный набор уровней факторов (т.е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, получится полное множество различных состояний данного «ящика». Одновременно это будет ***число возможных различных опытов***.

Чтобы узнать число различных состояний, достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов k: p^k, где p — число уровней. Например, система с пятью факторами па пяти уровнях имеет 3125 состояний, а для десяти факторов на четырех уровнях их уже свыше миллиона!

В этих условиях невозможно провести все опыты. На помощь приходит планирование эксперимента. Планирование эксперимента заключается в выборе такой стратегии экспериментирования, которая позволяет принимать обоснованные решения после каждой серии опытов. Оно позволяет определить заранее схему шагового процесса проведения эксперимента, включить в него минимальное число опытов при одновременном варьировании всеми факторами без снижения количества и качества полученной информации.

При планировании эксперимента объект исследования обладает двумя основными свойствами. Прежде всего, существенно, воспроизводятся ли на объекте результаты эксперимента. Для проверки этого свойства выбираются некоторые уровни для всех факторов, и в этих условиях проводится эксперимент. Затем повторяют его несколько раз через неравные промежутки времени и сравнивают значения параметра оптимизации. Разброс этих значений характеризует воспроизводимость результатов. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требованию ***воспроизводимости результатов***, а если превышает, то не удовлетворяет этому требованию. Рассматриваются только такие объекты, для которых требование воспроизводимости выполняется.

Планирование эксперимента предполагает активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Поэтому такой эксперимент называется ***активным***. Объект, на котором возможен активный эксперимент, называется ***управляемым***. Это и есть второе требование к объекту исследования.

На практике нет абсолютно управляемых объектов. На реальный объект обычно действуют как управляемые, так и неуправляемые факторы. Неуправляемые факторы влияют на воспроизводимость эксперимента и являются причиной её нарушения. Если требования воспроизводимости не выполняются, приходится обращаться к ***активно-пассивному эксперименту***.

Возможно, что все факторы неуправляемы. В этом случае возникает задача установления связи между параметром оптимизации и факторами по результатам наблюдений за поведением объекта, то есть по результатам ***пассивного эксперимента***.

Планирование экстремального эксперимента — это метод выбора количества и условий проведения опытов, минимально необходимых для отыскания оптимальных условий, то есть для решения поставленной задачи.

2. ПАРАМЕТР ОПТИМИЗАЦИИ

При планировании экстремального эксперимента очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и должна допускать количественную оценку. Характеристика цели, заданная количественно, называется ***параметром оптимизации*** [1]. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы. Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Целью исследования задается выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес.

2.1. Виды параметров оптимизации

В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть разнообразными. Их классификация представлена на рисунке 2. Реальные ситуации требуют одновременного учета нескольких параметров. В принципе каждый объект может характеризоваться сразу всей совокупностью параметров, приведенных на рисунке 2. Движение к оптимуму возможно, если выбран один параметр оптимизации. Тогда прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметров оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь — построение обобщенного параметра оптимизации.

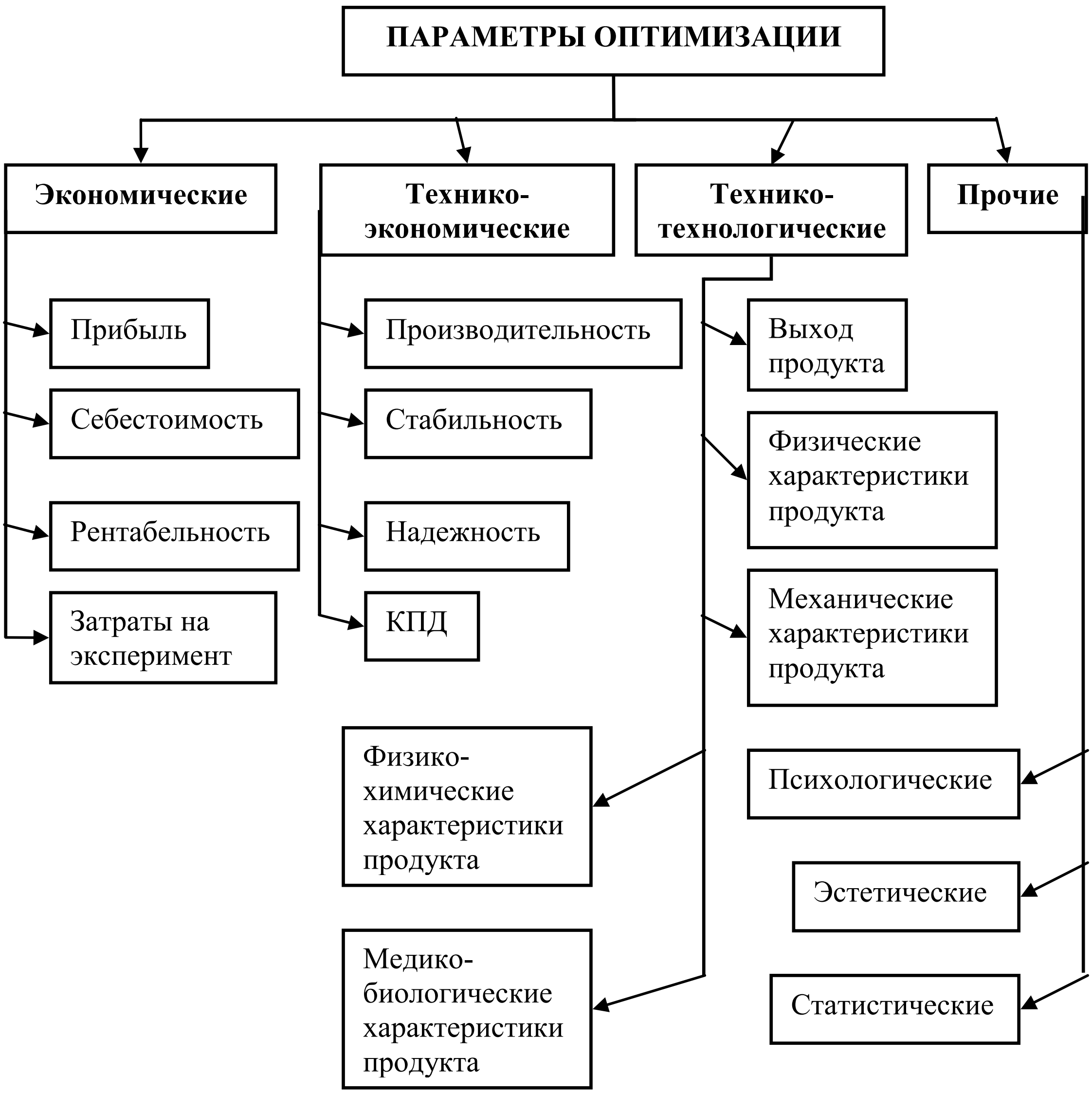

Рис. 2. Классификация параметров оптимизации

2.2. Требования к параметру оптимизации

Параметр оптимизации — это признак, по которому оптимизируют процесс. Он должен быть ***количественным*** (задаваться числом), ***измеряемым*** при любой возможной комбинации выбранных уровней факторов. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется ***областью его определения***. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции — это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100%. Число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава, количество рабочих на участке в цехе — примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Если нет способа количественного измерения результата эксперимента, то применяют ***ранжирование*** (ранговый подход). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки — ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Например, годная продукция – «да», брак – «нет».

Ранг — это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. В соответствие качественному признаку ставится некоторое число — ранг.

Следующее требование: параметр оптимизации должен выражаться ***одним числом.*** Например, скорость движения машины определяется числом на спидометре.

Еще одно требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации, — ***однозначность в статистическом смысле.*** Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации. (Обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.)

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно ***оценивал эффективность функционирования системы*** в заранее выбранном смысле. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи.

Также параметр оптимизации должен быть эффективным в статистическом смысле. Это требование сводится к выбору параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью.

Следующее требование к параметру оптимизации — требование ***универсальности*** или полноты. Под универсальностью параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику.

Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел ***физический смысл, был простым и легко вычисляемым.***

Параметр оптимизации в некоторой степени оказывает влияние на вид математической модели исследуемого объекта. Например, экономические параметры легче представляются простыми функциями, чем физико-химические показатели.

2.3. Задачи с несколькими выходными параметрами

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике часто приходится учитывать несколько выходных параметров. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого используют корреляционный анализ.

При этом между всевозможными парами параметров необходимо вычислить ***коэффициент парной корреляции***, который является общепринятой в математической статистике характеристикой связи между двумя случайными величинами [5]. Если обозначить один параметр через y_1, а другой — через y_2 и число опытов, в которых они будут измеряться, — через N, так, что $u = 1,2,...,N$, где u — текущий номер опыта, то коэффициент парной корреляции $r_{y_1 y_2}$ вычисляется по формуле

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{u=1}^{N} (y_{1u} - \bar{y}_1)(y_{2u} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{u=1}^{N} (y_{1u} - \bar{y}_1)^2 \sum_{u=1}^{N} (y_{2u} - \bar{y}_2)^2}},$$

где $\bar{y}_1 = \sum_{n=1}^{N} y_{1u} / N$; $\bar{y}_2 = \sum_{u=1}^{N} y_{2u} / N$ - средние арифметические соответственно для y_1 и y_2.

Значения коэффициента парной корреляции лежат в пределах от —1 до +1. Если с ростом значения одного параметра возрастает значение другого, у коэффициента будет знак плюс, а если уменьшается, то минус.

Чем ближе найденное значение $r_{y_1 y_2}$ к единице, тем сильнее значение одного параметра зависит от того, какое значение принимает другой, то есть между такими параметрами существует линейная связь, и при изучении процесса можно рассматривать только один из них. Необходимо помнить, что коэффициент парной корреляции как мера тесноты связи имеет четкий математический смысл только при линейной зависимости между параметрами и в случае нормального их распределения.

Для проверки значимости коэффициента парной корреляции нужно сравнить его значение с табличным (критическим) значением r, которое приведено в таблице 1. Для выбора табличного значения нужно определить число степеней свободы $f = N - 2$ и выбрать уровень значимости, например, равный 0,05 (5%-ным уровнем риска), что соответствует вероятности верного ответа при проверке гипотезы о корреляционной связи $P = 1 - \alpha = 0{,}95$, или 95%.

Таблица 1

Критическое значение коэффициента парной корреляции при $\alpha = 0{,}95$

Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r	Число степеней свободы f	Критическое значение r
1	0,997	9	0.602	17	0,456
2	0,950	10	0,576	18	0,456
3	0,878	11	0,553	19	0,433
4	0,811	12	0,532	20	0,423
5	0,754	13	0,514	21	0,349
6	0,707	14	0,497	22	0.273
7	0,666	15	0.482	23	0.217
8	0,632	16	0,468	24	0,195

Проверка гипотезы сводится к сравнению абсолютной величины коэффициента парной корреляции с критическим значением. Если экспериментально найденное значение r меньше критического, то тесная линейная связь между параметрами отсутствует, а если больше или равно, то гипотеза о корреляционной линейной связи не отвергается.

При высокой значимости коэффициента корреляции любой из двух анализируемых параметров можно исключить из рассмотрения как не содержащий дополнительной информации об объекте исследования. Исключить можно тот параметр, который технически труднее измерять, или тот, физический смысл которого менее ясен. При планировании эксперимента целесообразно измерять все параметры, затем оценить корреляцию между ними и строить модели для их минимально возможного числа или же воспользоваться обобщенным параметром. Но бывают случаи, когда приходится рассматривать и коррелированные параметры.

3. ФАКТОРЫ

После того как выбран объект исследования и параметр оптимизации, нужно включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным, то это может увеличить ошибку опыта.

Число различных состояний объекта p^k, где p — число уровней, а k — число факторов. Чем больше факторов, тем больше опытов. Число опытов растет по показательной функции.

Если число факторов больше пятнадцати, используют методы отсеивания несущественных факторов.

3.1. Определение фактора

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования [1].

Так же, как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указана область его определения. Под ***областью определения*** понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения.

Область определения может быть непрерывной и дискретной. В задачах планирования эксперимента всегда используются дискретные области определения. Для факторов с непрерывной областью определения, таких, как температура, время, количество вещества и т.п., всегда выбираются дискретные множества уровней. В практических задачах области определения факторов ограничены. Ограничения могут носить принципиальный либо технический характер.

Факторы разделяются на количественные и качественные.

Количественный фактор – это переменная величина, которую можно оценивать количественно: измерять, взвешивать, титровать и т.п.

Качественный фактор — это некоторая переменная, характеризующаяся качественными свойствами (разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д.).

Для качественных факторов нет соответствующей числовой шкалы, как для количественных факторов. В этом случае производится ***кодирование*** - строится условная порядковая шкала, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется.

3.2. Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента

При планировании эксперимента факторы должны быть ***управляемыми***. Это значит, что выбранное нужное значение фактора можно поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. можно управлять фактором. Это особенность активного эксперимента.

Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни). Такое определение фактора называется ***операциональным***. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Операциональное определение обеспечивает однозначное понимание фактора.

С операциональным определением связаны выбор размерности фактора и точность его фиксирования. ***Точность*** замера факторов должна быть возможно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов.

Факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект. Факторы должны быть ***однозначны***. Трудно управлять фактором, который является функцией других факторов, но в планировании могут участвовать сложные факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т.д.

3.3. Требования к совокупности факторов

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. К совокупности факторов предъявляются требования совместимости и независимости. ***Совместимость*** факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Это требование защищает от планирования условий опыта, которые могут привести к выходу из строя экспериментальной установки.

Несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения. Избавиться от нее можно сокращением областей. Положение усложняется, если несовместимость проявляется внутри областей определения. Одно из возможных решений — разбиение на подобласти и решение двух отдельных задач.

Независимость факторов - это отсутствие корреляции между факторами, возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент.

Допустим, при исследовании тягово-сцепных качеств ведущего колеса трактора определяем влияние двух факторов: крутящего момента $M_к$, приложенного к колесу, и вертикальной нагрузки на колесо. Назначаем пределы варьирования факторов: нижний уровень $M_{к_0} = 20 Н \cdot м$, верхний $M_{к_1} = 5000 Н \cdot м$. Нижний уровень для вертикальной нагрузки $P_0 = 1000 Н$, верхний $P_1 = 15000 Н$.

Может случиться так, что вариант $P_0 M_{к_1}$ (крутящий момент имеет максимальное значение, а вертикальная нагрузка — минимальное) реализовать невозможно из-за буксования колеса, т.е. данные факторы независимы, но их уровни несовместимы. В данной ситуации необходимо изменить пределы варьирования для осуществления реализации экспериментов.

4. ВЫБОР МОДЕЛИ

Под моделью понимают вид функции отклика

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Выбрать модель — значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение. Тогда останется спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений коэффициентов этого уравнения.

Чтобы постепенно проводить выбор модели, сначала нужно построить геометрический аналог функции отклика — ***поверхность отклика***. Для наглядности рассмотрим случай с двумя факторами.

Для изображения геометрически возможных состояний «черного ящика» с двумя входами достаточно располагать плоскостью с обычной декартовой системой координат. По одной оси координат откладываются в некотором масштабе значения (уровни) одного фактора, а по другой оси — второго. Тогда каждому состоянию «ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Для факторов существуют области определения. Это значит, что у каждого фактора есть минимальное и максимальное возможные значения, между которыми он может изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Если факторы совместимы, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник, внутри которого лежат точки, соответствующие состояниям «черного ящика». Пунктирными линиями на рисунке 3 обозначены границы областей определения каждого из факторов, а сплошными — границы их совместной области определения.

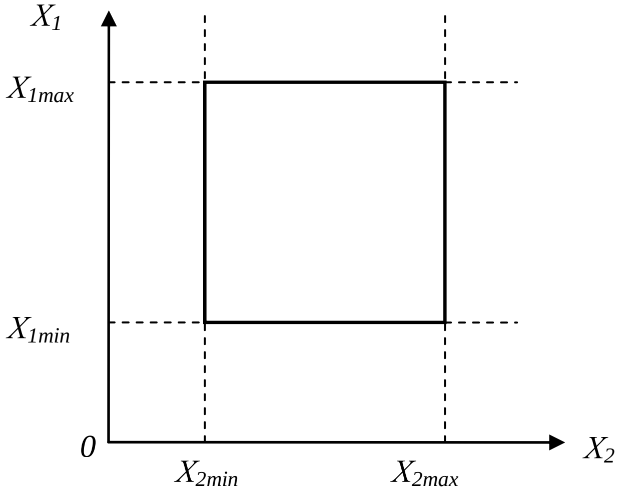

Рис. 3. Область определения факторов

Чтобы указать значение параметра оптимизации, требуется еще одна ось координат. Если ее построить, то поверхность отклика будет выглядеть так, как на рисунке 4. Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется ***факторным пространством***. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации. Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком.

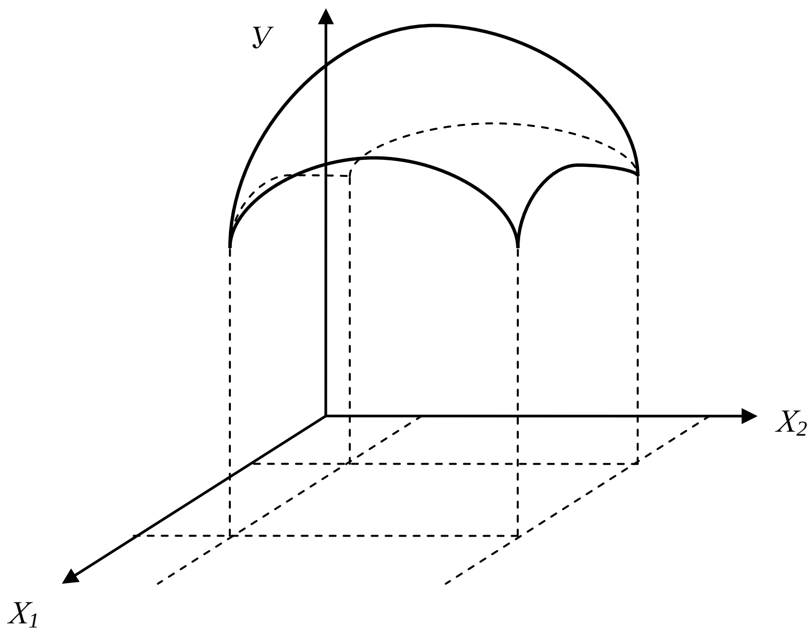

Рис. 4. Поверхность отклика

Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости X_1OX_2, и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость. Так строят, например, изображения гор и морских впадин на географических картах (рисунок 5). Точка *M* на рисунке — это и есть та оптимальная точка, которую находят. Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Такая линия называется ***линией равного отклика***. Существует соответствие между состоянием «ящика» и значением параметра оптимизации: каждому возможному состоянию «ящика» соответствует одно значение параметра оптимизации. Однако обратное неверно: одному возможному значению параметра оптимизации может соответствовать и одно, и несколько, и сколько угодно состояний «ящика» [4].

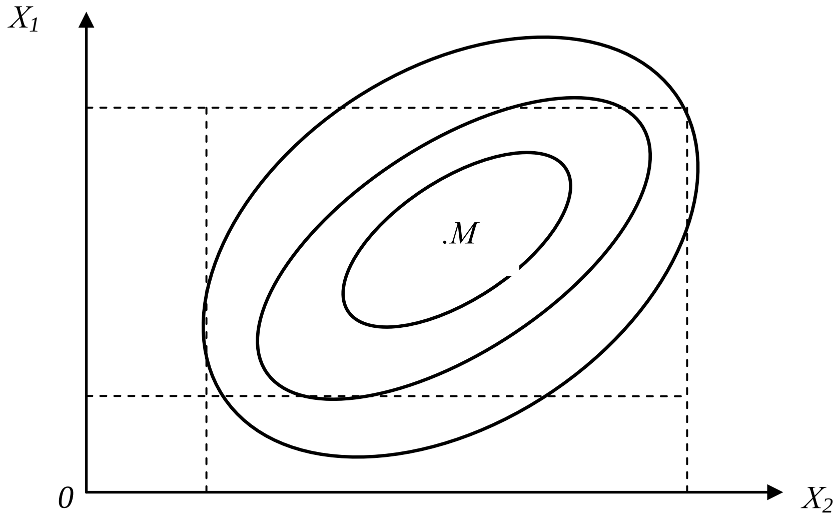

Рис. 5. Проекция сечений поверхности отклика на плоскость

Теперь, когда есть представление о поверхности отклика, можно определять стратегию постановки эксперимента для нахождения оптимума при минимуме затрат.

Если бы имелась таблица, в которой содержались бы все возможные состояния объекта и соответствующие им отклики, то особой необходимости в построении математической модели не было бы. Можно было бы просто выбрать то состояние, которое соответствует наилучшему отклику. Но перебор таких состояний велик, и практически реализовать это невозможно.

Другая стратегия — случайный выбор некоторого числа состояний и определение откликов в них, в надежде, что среди этих состояний попадется оптимальное или, по крайней мере, близкое к тому состояние.

Наконец, третья стратегия — строить математическую модель, чтобы с ее помощью предсказывать значения откликов в тех состояниях, которые не изучались экспериментально, причем даже не в каждом состоянии, а только в наиболее интересных, приближающихся к оптимуму.

Такая стратегия приводит к шаговому принципу, являющемуся основным в планировании эксперимента.

4.1. Шаговый принцип

Поскольку полный перебор состояний «черного ящика» невозможен, то необходимо сделать ***предположения-постулаты*** относительно свойств неизвестной модели до начала эксперимента (априори) [6]:

- непрерывность поверхности;
- гладкость поверхности;
- наличие единственного оптимума.

Эти постулаты позволяют представить изучаемую функцию в виде степенного ряда в окрестности любой возможной точки факторного пространства. Кроме того, способ постепенного приближения к оптимальной точке должен давать результат, не зависящий от исходной точки. Если оптимум один, то не важно, приближаемся мы к нему справа или слева, а если их несколько, да они еще неравноценны.

Принятые постулаты открывают возможность поэтапного движения к оптимуму, основанную на шаговом принципе.

Если, например, известны значения параметра оптимизации в нескольких соседних точках факторного пространства, можно (в силу гладкости и непрерывности функции отклика) представить результаты, которые можно ожидать в других соседних точках. Следовательно, можно найти такие точки, для которых ожидается наибольшее увеличение (или уменьшение, если определяется минимум) параметра оптимизации. Тогда ясно, что следующий эксперимент надо переносить именно в эти точки. Надо продвигаться в этом направлении, пренебрегая остальными (экономия опытов). Сделав новый эксперимент, снова можно оценить направление, в котором скорее всего следует двигаться. В силу единственности оптимума, таким образом, рано или поздно он будет достигнут. Это и есть ***шаговый принцип***. В факторном пространстве выбирается какая-то точка и рассматривается множество точек в ее окрестности, т.е. выбирается в области определения факторов малая подобласть. Здесь проводится эксперимент, на основании которого должна быть построена первая модель. Эта модель используется для предсказания результатов опытов в тех точках, которые не входили в эксперимент. Если эти точки лежат внутри исследуемой подобласти, то такое предсказание называется ***интерполяцией***, а если вне — ***экстраполяцией***. Чем дальше от области эксперимента лежит точка, для которой предсказывается результат, тем больше ошибка [7].

Попутно полученную модель можно использовать для проверки различных гипотез о механизме изучаемого явления или о его отдельных сторонах. Например, если предполагается, что увеличение значения некоторого фактора должно приводить к увеличению значения параметра оптимизации, то с помощью модели можно узнать, так ли это. Такая проверка называется ***интерпретацией модели***.

Существуют два варианта поэтапного поиска оптимума. Первый является ***классическим (метод Гаусса — Зейделя).*** Он состоит в том, что сначала последовательно изменяются значения одного фактора. Затем находится и фиксируется наилучшее значение этого фактора. В этих условиях последовательно изменяются значения второго фактора и т.д. (если больше факторов).

Второй заключается в ***шаговой процедуре***. Сначала изучается локальная область, затем определяется наиболее интересное направление и в этом направлении ставятся следующие опыты.

Эффективность каждого варианта зависит от вида поверхности, а также от того, в какой последовательности перебираются факторы в первом случае и из окрестностей какой точки начат эксперимент во втором случае. В среднем шаговый метод эффективней, чем классический.

4.2. Требования к модели

Чтобы выбрать модель из всего разнообразия, нужно сформулировать требования.

Исходя из выбранной стратегии, главное требование к модели — это способность предсказывать направление дальнейших опытов, причем предсказывать с требуемой точностью. Точность предсказания во всех возможных направлениях должна быть одинакова.

Это значит, что в некоторой подобласти, в которую входят и координаты выполненных опытов, предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического больше, чем на некоторую заранее заданную величину. Модель, которая удовлетворяет такому или какому-либо аналогичному требованию, называется ***адекватной.***

Модель должна быть самой ***простой***. Предпочтение отдается отрезкам степенных рядов — ***алгебраическим полиномам***. Построение полинома возможно в окрестностях любой точки факторного пространства, поскольку сделано предположение, что функция является аналитической [8].

Предполагается, что исходные постулаты являются верными. Тогда выбран наиболее простой, удобный и математически разработанный класс моделей.

Полиномы для случая двух факторов будут различаться по максимальным степеням входящих в них переменных.

Полином нулевой степени: $y = b_0$.

Полином первой степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.

Полипом второй степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$.

Полипом третьей степени:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 + \\ + b_{122}x_1x_2^2 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3.$$

4.3. Полиномиальные модели

Неизвестная функция отклика представлена полиномом. Операция замены одной функции другой, в каком-то смысле эквивалентной функцией называется ***аппроксимацией***. Значит, неизвестная функция аппроксимирована полиномом.

Численные значения коэффициентов полинома определяют по результатам эксперимента. Чем больше коэффициентов, тем больше опытов потребуется провести. Нужно сократить их число. Чем ниже степень полинома при заданном числе факторов, тем меньше в нем коэффициентов.

Требуется, чтобы модель хорошо предсказывала направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации. Такое направление называется ***направлением градиента***. Движение в этом направлении приведет к успеху быстрее, чем движение в любом другом направлении (экономия числа опытов).

Полином первой степени (линейная модель), с одной стороны, содержит информацию о направлении градиента, с другой — в нем минимально возможное число коэффициентов при данном числе факторов. Адекватность линейной модели гарантируется аналитической функцией отклика. Всегда существует такая окрестность любой точки, в которой линейная модель адекватна. Размер такой области заранее не известен, но адекватность можно проверять по результатам эксперимента. Значит, выбрав сначала произвольную подобласть, можно рано или поздно найти её требуемые размеры, а затем воспользоваться движением по градиенту.

На следующем этапе нужно находить линейную модель уже в другой подобласти. Цикл повторяется до тех пор, пока движение по градиенту не перестанет давать эффект. Это значит, что найдена область, близкая к оптимуму. Такая область называется «почти стационарной». Здесь линейная модель уже не нужна. Либо попаданием в почти стационарную область задача решена, либо надо переходить к полиномам более высоких степеней, например второй степени, чтобы подробнее описать область оптимума.

5. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

5.1. Принятие решений перед планированием эксперимента

При выборе области эксперимента прежде всего надо оценить границы областей определения факторов. При этом должны учитываться ограничения нескольких типов. Первый тип — ***принципиальные ограничения*** для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах. Например, если фактор - температура, то нижним пределом будет абсолютный нуль. Второй тип — ограничения, связанные с ***технико-экономическими*** соображениями, например, со стоимостью сырья, дефицитностью отдельных компонентов, временем ведения процесса. Третий тип ограничений определяется конкретными условиями проведения процесса, например, существующей аппаратурой, технологией, организацией.

Оптимизация обычно начинается в условиях, когда объект уже подвергался некоторым исследованиям. Информацию, содержащуюся в результатах предыдущих исследований, называют ***априорной***. Априорную информацию используют для получения представления о параметре оптимизации, о факторах, о наилучших условиях ведения процесса и характере поверхности отклика, т.е. о том, как сильно меняется параметр оптимизации при небольших изменениях значений факторов, а также о кривизне поверхности. Для этого можно использовать графики (или таблицы) однофакторных экспериментов, осуществлявшихся в предыдущих исследованиях или описанных в литературе. Если однофакторную зависимость нельзя представить линейным уравнением (в рассматриваемой области), то в многомерном случае будет существенная кривизна.

Выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации.

В области определения надо найти локальную подобласть для планирования эксперимента. Процедура выбора этой подобласти включает два этапа: выбор основного уровня и выбор интервалов варьирования.

5.1.1. Выбор основного уровня фактора

Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует комбинация уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Ее можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Она называется основным (нулевым) уровнем фактора [1]. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно нулевого уровня.

В разных случаях исследователь располагает различными сведениями об области наилучших условий. Если имеются сведения о координатах одной наилучшей точки и нет информации о границах определения факторов, то остается рассматривать эту точку в качестве основного уровня. Аналогичное решение принимается, если границы известны и наилучшие условия лежат внутри области.

Положение усложняется, если эта точка лежит на границе области. Тогда приходится основной уровень выбирать с некоторым сдвигом от наилучших условий.

Возможно, что координаты наилучшей точки неизвестны, но есть сведения о некоторой подобласти, в которой процесс идет достаточно хорошо. Тогда основной уровень выбирается либо в центре, либо в случайной точке этой подобласти. Сведения о подобласти можно получить, анализируя изученные ранее подобные процессы, из теоретических соображений или из предыдущего эксперимента.

Наконец, возможен случай с несколькими эквивалентными точками, координаты которых различны. Когда отсутствуют дополнительные данные (технологического, экономического характера и т.д.), выбор произволен.

После того как нулевой уровень выбран, выбирается интервал варьирования.

5.1.2. Выбор интервалов варьирования

Для каждого фактора выбирается два уровня, на которых он будет варьироваться в эксперименте.

Один из этих уровней называется ***верхним***, а второй - ***нижним***. Обычно за верхний уровень принимается тот, который соответствует большему значению фактора, для качественных факторов безразлично. ***Интервалом варьирования факторов*** называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание — нижний уровни фактора. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных верхний уровень обозначают +1, нижний -1, а основной — 0. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{I_j},$$

где x_j — кодированное значение фактора;

$\tilde{x}_j$ — натуральное значение фактора;

$\tilde{x}_{j0}$ — натуральное значение основного уровня;

I_j — интервал варьирования;

j — номер фактора.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, одни уровень обозначается +1, а другом -1; порядок уровней не имеет значения.

На выбор интервалов варьирования накладываются ***естественные ограничения снизу и сверху***. Интервал варьирования не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора. Иначе верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровни оказались за пределами области определения.

Выбор интервалов варьирования связан с неформализованным этапом планирования эксперимента. На данном этапе полезна априорная информация. Это — сведения о точности, с которой фиксируются значения факторов, о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметру оптимизации. Обычно эта информация является ориентировочной. В ходе эксперимента её часто приходится корректировать.

Точность фиксирования факторов определяется точностью приборов и стабильностью уровня в ходе опыта. Для упрощения схемы принятия решений вводится приближенная классификация: низкая, средняя и высокая точности. Например, поддержание температуры в реакторе с погрешностью не более 1% соответствует высокой, не более 5% — средней, а более 10% — низкой точности [1].

Источником ***сведений о кривизне поверхности отклика*** могут служить графики однофакторных зависимостей, а также теоретические соображения. Из графиков сведения о кривизне можно получить визуально. Некоторое представление о кривизне дает анализ табличных данных, так как наличию кривизны соответствует непропорциональное изменение параметра оптимизации при равномерном изменении фактора. Различают три случая: функция отклика линейна, функция отклика существенно нелинейна и информация о кривизне отсутствует [1].

Диапазон изменения значений параметра оптимизации в разных точках факторного пространства можно определить по результатам некоторого множества опытов. Всегда можно найти наибольшее или наименьшее значение параметра оптимизации. Разность между этими значениями называется диапазоном изменения параметра оптимизации для данного множества опытов. Различают широкий и узкий диапазоны. Диапазон будет узким, если он несущественно отличается от разброса значений параметра оптимизации в повторных опытах. В противном случае - диапазон широкий. Учитывается также случай, когда информация отсутствует [1]. Итак, для принятия решений используется априорная информация о точности фиксирования факторов, кривизне поверхности отклика и диапазоне изменения параметра оптимизации. Каждое сочетание градаций перечисленных признаков определяет ситуацию, в которой нужно принимать решение.

При принятых градациях возможно $3^3 = 27$ различных ситуаций. Они представлены в таблицах 2, 3, 4.

Для интервалов также вводится градация. Рассматриваются ***широкий, средний и узкий интервалы варьирования***, а также случай, когда трудно принять однозначное решение. Размер интервала варьирования составляет некоторую долю от области определения фактора. Если интервал составляет не более 10% от области определения, то он считается узким, не более 30% — средним и в остальных случаях — широким [1]. В каждой конкретной задаче специально определяются эти понятия, которые зависят не только от размера области определения, но и от характера поверхности отклика, и от точности фиксирования факторов.

В первой таблице представлены девять ситуаций, имеющих место при низкой точности фиксирования факторов. При выборе решений учитывается информация о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Типичное решение — широкий интервал варьирования. Узкий интервал совершенно не используется, что вполне понятно при низкой точности.

Наибольшие трудности возникают, когда поверхность отклика нелинейна. Появляется противоречие между низкой точностью фиксирования фактора и кривизной. Первая требует расширения интервала, а вторая – сужения. В этом случае рассматриваются дополнительные рекомендации, отображенные в таблице 2.

Таблица 2

Принятие решения при низкой точности фиксирования фактора

<table>
<tr><th rowspan="2">Кривизна поверхности отклика</th><th colspan="3">Диапазон параметра оптимизации</th></tr>
<tr><td>широкий</td><td>узкий</td><td>неизвестно</td></tr>
<tr><td>линейная</td><td colspan="3">Широкий интервал варьирования факторов</td></tr>
<tr><td>нелинейная</td><td colspan="3">Решение неоднозначно:
• увеличение точности поддержания факторов;
• увеличение числа повторных опытов;
• интуитивное решение</td></tr>
<tr><td>неизвестно</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td><td colspan="2">Широкий интервал варьирования факторов</td></tr>
</table>

Для случая средней точности фиксирования фактора (таблица 3) характерен выбор среднего интервала варьирования. Лишь в случае нелинейности и широкого диапазона рекомендуется узкий интервал варьирования. При сочетании линейной поверхности с узким диапазоном и отсутствии информации о диапазоне выбирается широкий интервал варьирования.

Таблица 3

Принятие решения при средней точности фиксирования фактора

<table>
<tr><th rowspan="2">Кривизна поверхности отклика</th><th colspan="3">Диапазон параметра оптимизации</th></tr>
<tr><td>широкий</td><td>узкий</td><td>неизвестно</td></tr>
<tr><td>линейная</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td><td colspan="2">Широкий интервал варьирования факторов</td></tr>
<tr><td>нелинейная</td><td>Узкий интервал варьирования факторов</td><td colspan="2">Средний интервал варьирования факторов</td></tr>
<tr><td>неизвестно</td><td colspan="3">Средний интервал варьирования факторов</td></tr>
</table>

Для случая высокой точности фиксирования фактора (таблица 4) в сочетании с нелинейностью поверхности выбирается узкий интервал. Довольно часто выбирается средний интервал и лишь в двух случаях широкий. В обеих последних таблицах отсутствуют неоднозначные решения.

Таблица 4

Принятие решения при высокой точности фиксирования фактора

<table>
<tr><th rowspan="2">Кривизна поверхности отклика</th><th colspan="3">Диапазон параметра оптимизации</th></tr>
<tr><td>широкий</td><td>узкий</td><td>неизвестно</td></tr>
<tr><td>линейная</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td><td>Широкий интервал варьирования факторов</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td></tr>
<tr><td>нелинейная</td><td colspan="3">Узкий интервал варьирования факторов</td></tr>
<tr><td>неизвестно</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td><td>Широкий интервал варьирования факторов</td><td>Средний интервал варьирования факторов</td></tr>
</table>

После того как выбраны основные уровни и интервалы варьирования факторов, можно приступить к построению плана проведения эксперимента.

5.2. Полный факторный эксперимент типа 2^k

Первый этап планирования эксперимента для получения линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов, по формуле

$$N = 2^k,$$

где N — число опытов;
k — число факторов;
2 — число уровней фактора.

В общем случае ***эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом*** [5]. Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа 2^k.

Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы — значениям факторов. Такие таблицы называются ***матрицами планирования эксперимента***. Матрица планирования для двух факторов приведена в таблице 5.

Таблица 5

Матрица планирования эксперимента типа 2^2

Номер опыта	Фактор		Параметр
	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Каждый столбец в матрице планирования называется вектор-столбцом, а каждая строка — вектор-строкой. Таким образом, в таблице 5 имеем два вектора-столбца независимых переменных и один вектор-столбец параметра оптимизации. То, что записано в этой таблице в алгебраической форме, можно изобразить геометрически. В области определения факторов через точку, соответствующую основному уровню, проводятся новые оси координат, параллельные осям натуральных значений факторов. Выбираются масштабы по новым осям так, чтобы интервал варьирования для каждого фактора равнялся единице. Тогда условия проведения опытов будут соответствовать вершинам квадрата, центром которого является основной уровень, а каждая сторона параллельна одной из осей координат и равна двум интервалам (рисунок 6). Номера вершин квадрата соответствуют номерам опытов в матрице планирования Площадь, ограниченная квадратом, называется ***областью эксперимента.***

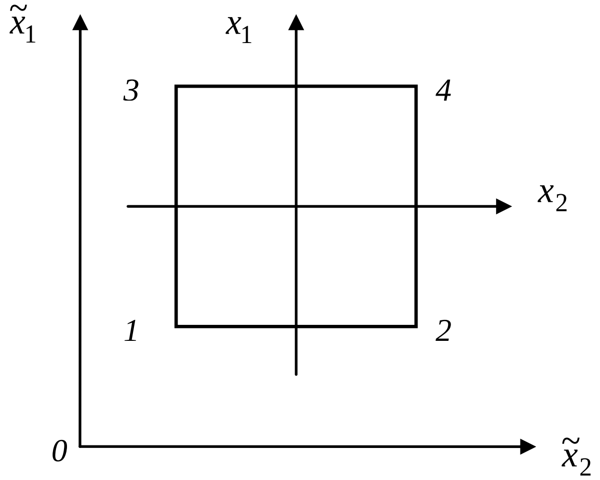

Рис. 6. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^2

Запись матрицы планирования, особенно для многих факторов, громоздка. Для ее сокращения вводятся условные буквенные обозначения строк.

Это делается следующим образом. Порядковый номер фактора ставится в соответствие строчной букве латинского алфавита: $x_1 - a$, $x_2 - b$, . . . и т.д. Если теперь для строки матрицы планирования выписать латинские буквы только для факторов, находящихся на верхних уровнях, то условия опыта будут заданы однозначно. Опыт со всеми факторами на нижних уровнях обозначается (1). Матрица планирования вместе с принятыми буквенными обозначениями приведена в таблице 6.

Теперь вместо полной записи матрицы планирования можно пользоваться только буквенными обозначениями, представив матрицу в виде строчной записи *(1), a, b, ab.*

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней легко найти прямым перебором, то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц. Существует несколько приемов, основанных на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности. Наиболее простой заключается в следующем. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана встречается дважды: в сочетании с нижним и верхним уровнями нового фактора. Отсюда правило: записать исходный план для одного уровня нового фактора, а затем повторить его для другого уровня. Переход от эксперимента 2^2 к эксперименту 2^3 показан в таблице 7.

Этот прием распространяется на построение матриц любой размерности.

Геометрической интерпретацией полного факторного эксперимента 2^3 служит куб, координаты вершин которого задают условия опытов.

Фигура, задающая область эксперимента в многомерном пространстве, является некоторым аналогом куба и называется гиперкубом.

Таблица 6

Матрица планирования эксперимента типа 2^2

Номер опыта	Фактор		Буквенное обозначение строк	Параметр
	x_1	x_2		y
1	-1	-1	(1)	y_1
2	+1	-1	*a*	y_2
3	-1	+1	*b*	y_3
4	+1	+1	*ab*	y_4

Таблица 7

Матрица планирования эксперимента типа 2^3

Номер опыта	Фактор			Параметр
	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	+	y_1
2	+	-	+	y_2
3	-	+	+	y_3
4	+	+	+	y_4
5	-	-	-	y_5
6	+	-	-	y_6
7	-	+	-	y_7
8	+	+	-	y_8

5.3. Свойства полного факторного эксперимента типа 2^k

Матрицы планирования полных факторных экспериментов с факторами на двух уровнях обладают общими свойствами независимо от числа факторов. Такие свойства матриц определяют качество математической модели процесса. Ведь эксперимент и планируется для того, чтобы получить модель, обладающую некоторыми оптимальными свойствами. Это значит, что оценки коэффициентов модели должны быть наилучшими и что точность предсказания параметра оптимизации не должна зависеть от направления в факторном пространстве.

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы. Первое из них — ***симметричность относительно центра эксперимента:*** алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0,$$

где j — номер фактора, $j = 1,2,\ldots,k$;
N — число опытов.

Второе свойство — ***условие нормировки:*** сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N.$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и -1.

Свойство совокупности столбцов матрицы - ***ортогональностью матрицы планирования:*** сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0, \quad j \neq u, \quad j,u = 0,1,2,\ldots,k.$$

Последнее, четвертое свойство называется ***ротатабельностью***, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

5.4. Полный факторный эксперимент и математическая модель

По результатам эксперимента находятся значения неизвестных коэффициентов модели. Эксперимент проводится для проверки гипотезы о том, что линейная модель $\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ адекватна. Греческие буквы использованы для обозначения «истинных» генеральных значений соответствующих неизвестных. Эксперимент, содержащий конечное число опытов, позволяет только получить выборочные оценки для коэффициентов уравнения $y = b_0 + b_1x_1 + ... + b_kx_k$. Их точность и надежность зависят от свойств выборки и нуждаются в статистической проверке.

Оценки коэффициентов вычисляются по формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N}, \; j = 0,1,\ldots,k.$$

Расчет оценок коэффициентов b_1 и b_2 для двухфакторного эксперимента, матрица которого представлена в таблице 5, по этой формуле следующий

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4},$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4}.$$

Благодаря кодированию факторов расчет коэффициентов превращается в простую арифметическую процедуру. Для подсчета коэффициента b_1 используется вектор-столбец x_1, а для b_2 — столбец x_2. Не ясно, как найти b_0. Если уравнение $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных: $\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$. Но в силу свойства симметрии $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Следовательно, $\bar{y} = b_0$, b_0 есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации.

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Переход фактора от нижнего к верхнему уровню называется ***эффектом фактора***. Он численно равен удвоенному коэффициенту [1]. Для качественных факторов, варьируемых на двух уровнях, основной уровень не имеет физического смысла. Поэтому понятие «эффект фактора» является здесь естественным.

Планируя эксперимент, на первом этапе используют линейную модель. Однако нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью. Тогда нужна нелинейная модель.

Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. В этом случае имеет место эффект взаимодействия факторов. Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов. При вычислении коэффициента, соответствующего эффекту взаимодействия, с новым вектор-столбцом можно обращаться так же, как с вектор-столбцом любого фактора. Для полного факторного эксперимента 2^2 матрица планирования с учетом эффекта взаимодействия представлена в таблице 8. Очень важно, что при добавлении столбцов эффектов взаимодействий все рассмотренные свойства матриц планирования сохраняются.

Таблица 8

Матрица планирования эксперимента типа 2^2 с эффектом взаимодействия

Номер опыта	Фактор			Взаимодействие факторов	Параметр
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Теперь модель выглядит следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 .$$

Коэффициент b_{12} вычисляется по обычной формуле

$$b_{12} = \frac{(+1) y_1 + (-1) y_2 + (-1) y_3 + (+1) y_4}{4}.$$

Столбцы x_1 и x_2 задают планирование — по ним непосредственно определяются условия опытов, а столбцы x_0 и $x_1 x_2$ служат только для расчета.

При оптимизации желательно сделать эффекты взаимодействия возможно меньшими. В задачах интерполяции, напротив, их выявление важно и интересно.

С ростом числа факторов число возможных взаимодействий быстро растет. Для полного факторного эксперимента 2^3 матрица планирования с учетом всех возможных взаимодействий представлена в таблице 9.

Столбец эффекта взаимодействия $x_1x_2x_3$ получается перемножением всех трех столбцов и называется ***эффектом взаимодействия второго порядка***. Эффект взаимодействия двух факторов называется ***эффектом взаимодействия первого порядка***. Вообще эффект взаимодействия максимального порядка в полном факторном эксперименте имеет порядок, на единицу меньший числа факторов.

Таблица 9

Полный факторный эксперимент типа 2^3

Номер опыта	Фактор				Взаимодействие факторов				Параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	-	-	+	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	y_3
4	+	+	+	+	+	+	+	+	y_4
5	+	-	-	-	+	+	+	-	y_5
6	+	+	-	+	-	+	-	-	y_6
7	+	-	+	+	-	-	+	-	y_7
8	+	+	+	-	+	-	-	-	y_8

Полное число всех возможных эффектов, включая b_0, линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, равно числу опытов полного факторного эксперимента. Число возможных взаимодействий некоторого порядка определяется по формуле [1]

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

где C_k^m - число сочетаний;

k — число факторов;

m — число элементов во взаимодействии. Так, для плана 2^4 число парных взаимодействий равно шести.

Ортогональность матрицы планирования позволяет получить независимые друг от друга оценки коэффициентов. Это означает, что величина любого коэффициента не зависит от того, какие величины имеют другие коэффициенты.

Сформулированные выше утверждения справедливы лишь в том случае, если модель включает только линейные эффекты и эффекты взаимодействия. Однако существенными могут оказаться коэффициенты при квадратах факторов, их кубах и т.п. Так, для случая существенных квадратичных членов в двухфакторном эксперименте модель можно записать так:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 .$$

Построения вектор-столбцов для x_1^2 и x_2^2 приводит к получению единичных столбцов, совпадающих друг с другом и со столбцом x_0. Так как эти столбцы неразличимы, то нельзя сказать, за счет чего получилась величина b_0. Она включает значение свободного члена и вклады квадратичных членов. При этом случае имеет место смешанная оценка, которая записывается следующим образом:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} ,$$

где b_0 — вычисленный коэффициент;

β_0 - неизвестные истинные значения свободного члена;

β_{jj} - неизвестные истинные значения квадратичных коэффициентов.

По отношению к квадратичной модели для двух факторов получается такая система смешивания:

$$b_0 \to \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} ,\ b_1 \to \beta_1 ,\ b_2 \to \beta_2 ,\ b_{12} \to \beta_{12} .$$

Следовательно, оценки всех коэффициентов, кроме b_0, не смешаны.

6. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Прежде чем приступить к проведению экспериментов, нужно формализовать сведения, имеющиеся об объекте. Для этого можно воспользоваться анкетой, приведенной в следующем параграфе.

6.1. Анкета для сбора априорной информации

6.1.1. Постановка задачи, выбор параметров оптимизации

1. Краткое описание процесса, объекта.
2. Формулировка цели исследования.
3. Выбор параметров оптимизации (откликов).
4. Желаемый результат. Число и точность.
5. Какой результат будет считаться отличным, хорошим, удовлетворительным, неудовлетворительным.

6.1.2. Выбор факторов

1. Список всех факторов, которые могут влиять на процесс.
2. Список факторов, включаемых в реальный эксперимент.
3. Существуют ли возможности установления значения фактора на любом заданном уровне?
4. Сохраняются ли заданные значения уровней в течение опыта?
5. Могут ли некоторые комбинации уровней факторов привести к остановке процесса?

6.1.3. Число опытов

1. Желаемое число опытов, ограничения на число опытов.
2. Желаемый срок проведения исследования.
3. Примерная длительность одного опыта.
4. Стоимость и затраты труда при проведении одного опыта серии.
5. Желаемое число уровней для одного фактора.
6. Возможность выполнения параллельных опытов и их желаемое число.
7. Возможность проведения параллельных измерений.
8. Желаемая стратегия проведения опытов.

6.1.4. Учет априорной информации

1. Условия и результаты, достигнутые при изучении аналогичных процессов.
2. Результаты предварительного эксперимента и данные (литературные и собственные) о величине ошибки эксперимента.
3. Взаимодействия факторов.

6.2. Реализация плана эксперимента

К проведению опытов необходимо тщательно подготовиться, собрать опытную установку, проверить и прокалибровать приборы, подготовить исходное сырье, составить специальный журнал. Журнал заранее оформляют в соответствии с методикой и планом опытов так, чтобы была ясна последовательность действий. Подробная информация по оформлению и ведению журнала дается в [1].

Тщательная подготовка к опыту будет способствовать уменьшению ошибки опыта. Ошибка опыта является суммарной величиной, состоящей из ряда ошибок: ошибок при измерении факторов, параметра оптимизации и ошибок при проведении опыта.

6.3. Ошибки параллельных опытов

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка повторных опытов не дает полностью совпадающих результатов, потому что всегда существует ошибка опыта. Для этого опыт воспроизводится по возможности в одинаковых условиях несколько раз и затем берется ***среднее арифметическое всех результатов*** $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots y_n}{n} = \frac{\sum_{g=1}^{n} y_g}{n}.$$

Отклонение результата любого опыта от среднеарифметического можно представить как разность $y_g - \bar{y}$, где y_g - результат отдельного опыта. Наличие отклонений свидетельствует об изменчивости значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости чаще всего используют дисперсию. ***Дисперсией*** называется среднее значение квадрата отклонения величины от её среднего значения. Дисперсия обозначается S^2 и выражается формулой

$$S^2 = \frac{\sum_{g=1}^{n} (y_g - \bar{y})^2}{n-1}.$$

где $(n-1)$ — число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица. Одна степень свободы использована для вычисления среднего.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется ***средним квадратическим отклонением***, стандартом или квадратичной ошибкой.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{g=1}^{n} (y_g - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

Стандарт имеет размерность той величины, для которой он вычислен. Дисперсия и стандарт — это меры рассеяния, изменчивости. Чем больше дисперсии и стандарт, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

Ошибкой измерения называется разность $y_i - y_0$ между результатом измерения y_i, и истинным значением y_0 измеряемой величины [4].

Одной из основных задач математической обработки результатов опыта как раз и является оценка истинного значения измеряемой величины. Обычно не известны значение ошибки и истинное значение величины, поэтому ставится задача вычисления χ_0 с минимальной ошибкой.

Ошибка опыта является суммарной величиной, результатом многих ошибок: ошибок измерений факторов, ошибок измерений параметра оптимизации и др. Каждую из этих ошибок можно, в свою очередь, разделить на составляющие (рисунок 7).

Все ошибки принято разделять на два класса: систематические и случайные. ***Систематические ошибки*** вызваны причинами, действующими регулярно, в определенном направлении. Например, после проведения серии измерений будет обнаружена неправильная регулировка прибора на нулевую отметку. Эти ошибки можно изучить и определить количественно. Систематические ошибки находят, калибруя измерительные приборы и сопоставляя опытные данные с изменяющимися внешними условиями. Их влияние компенсируется. ***Случайными ошибками*** называются те, которые появляются нерегулярно, причины возникновения которых не известны и которые невозможно учесть заранее. Случайные ошибки измерения вызываются большим количеством таких факторов, эффекты действия которых столь незначительны, что их нельзя учесть в отдельности. Случайную ошибку можно рассматривать как суммарный эффект действия таких факторов. Случайные ошибки являются неустранимыми, но с помощью методов теории вероятностей их можно учесть и внести соответствующие поправки к истинному значению.

Грубые ошибки или промахи являются результатом низкой квалификации лица, производящего измерения, его небрежности или неожиданных сильных внешних воздействий на измерения. Промахи исключаются из обработки результатов.

Систематические и случайные ошибки состоят из множества ***элементарных ошибок***. Для того чтобы исключать инструментальные ошибки, следует проверять приборы перед опытом, иногда в течение опыта и обязательно после опыта. Ошибки при проведении самого опыта возникают вследствие неравномерного нагрева реакционной среды, разного способа перемешивания и т.п.

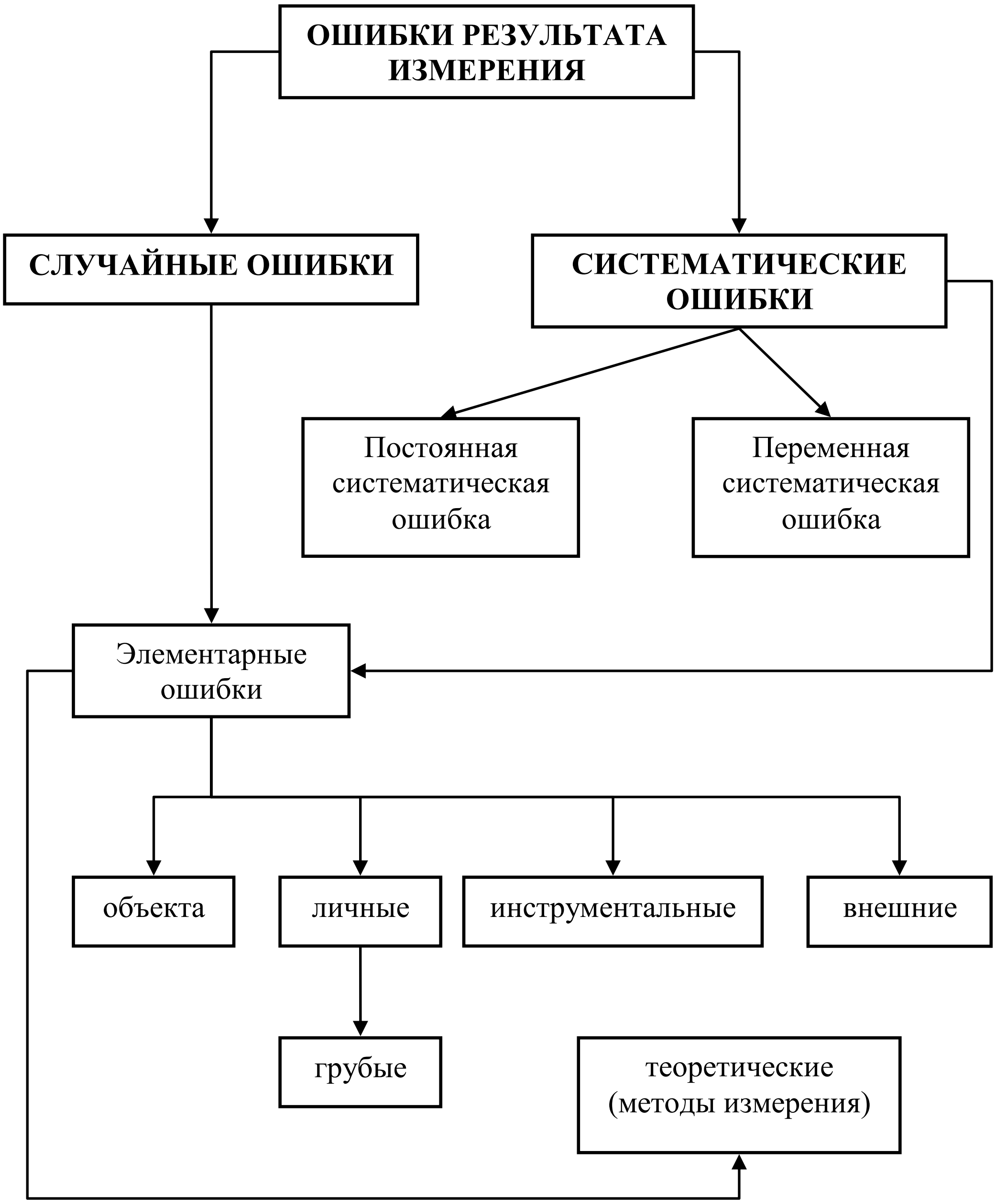

Рис. 7. Компоненты ошибки измерений

При повторении опытов такие ошибки могут вызвать большой разброс экспериментальных результатов.

Если измерения выполняются неоднократно, то их результаты обозначают $y_1, y_2, \ldots, y_n \; (i = 1, 2, \ldots i)$, тогда разность $\Delta y_i = y_i - y_0$ называется ***абсолютной ошибкой***.

Качество результатов измерений удобно характеризовать не абсолютной, а ***относительной ошибкой***, которая равняется отношению абсолютной ошибки к истинному значению измеряемой величины, выраженной в процентах, т.е. [7]

$$\frac{\Delta y_i}{y_0}100\ .$$

При измерениях физических величин, когда основную роль играют случайные ошибки, все оценки точности измерений можно сделать только с некоторой вероятностью. При этом часть ошибок будет положительной, часть — отрицательной. Общая ошибка, которая образуется в результате сложения таких элементарных ошибок, может иметь различные значения, но каждому из них будет соответствовать определенная вероятность.

Для выявления случайной ошибки измерения необходимо измерение повторить несколько раз.

Следует отметить, что любое значение искомого параметра, вычисленное на основе ограниченного числа опытов (измерений), всегда будет содержать элемент случайности. Такое приближенное, случайное значение называют ***оценкой параметра***. Выбирают такие оценки параметров, чтобы ошибки были минимальными.

Пусть α означает вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину, не большую, чем Δy. Это принято записывать в виде $P(\bar{y}-\Delta y < y_0 < \bar{y}+\Delta y)=\alpha$. Вероятность α носит название доверительной вероятности, или коэффициента надежности. Интервал от $\bar{y}-\Delta y$ до $\bar{y}+\Delta y$ называется доверительным интервалом.

Чем выше надежность, тем большим получается доверительный интервал, и наоборот: чем больше доверительный интервал, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы.

Таким образом, приходим к очень важному заключению: для характеристики величины случайной ошибки необходимо задать два числа, а именно — величину самой ошибки (или доверительного интервала) и величину доверительной вероятности [7].

Задание величины ошибки без доверительной вероятности не имеет смысла, так как имеет неопределенность в обозначении границ изменения случайной величины (ошибки).

Если в ряду измерений какой-то величины есть сильно отклоняющиеся результаты, которые являются следствием грубых ошибок или промахов, то существуют методы их исключения.

В подобных случаях необходимо произвести проверку принадлежности подозреваемого измерения к исследуемому статистическому ряду.

Считается, что отклонение от среднего арифметического значения не должно превышать предельной ошибки $\pm 3\sigma$. Поэтому отклонение, превышающее по своему значению величину $\pm 3\sigma$, показывает, что данное измерение было грубым и его надо исключить из рассмотрения.

Важно исключить из экспериментальных данных ***грубые ошибки*** (брак) при повторных опытах. Для определения брака используют критерий Стьюдента

$$\frac{y-\bar{y}}{s} \geq t .$$

Значение t берут из таблицы t - распределении Стьюдента. Опыт считается бракованным, если экспериментальное значение критерия t по модулю больше табличного значения.

6.4. Дисперсия параметра оптимизации

Матрица планирования состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсий всех опытов. Такая дисперсия называется ***дисперсией параметра оптимизации*** или дисперсией воспроизводимости эксперимента [1].

При подсчете дисперсии параметра оптимизации квадрат разности между значением y_g в каждом опыте и средним значением из n повторных наблюдений $\bar{y}$ нужно просуммировать по числу опытов в матрице N, а затем разделить на $N(n-1)$. Дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле

$$S^2_{\{y\}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{g=1}^{n}\left(y_{ig}-\bar{y}_i\right)^2}{N(n-1)},$$

где $i=1,2,\ldots,N$; $q=1,2,\ldots,n$.

Такая формула справедлива в случаях, когда число повторных опытов одинаково во всей матрице.

Дисперсию воспроизводимости проще всего рассчитывать, когда соблюдается равенство числа повторных опытов во всех экспериментальных точках. На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда число повторных опытов различно.

6.5. Проверка однородности дисперсий

Проверка однородности дисперсий производится с помощью различных статистических критериев. Простейшим из них является критерий Фишера, предназначенный для сравнения двух дисперсий. ***Критерий Фишера (F-критерий)*** представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей. Полученная величина сравнивается с табличной величиной F-критерия.

Если полученное значение дисперсионного отношения больше приведенного в таблице для соответствующих степеней свободы и выбранного уровня значимости, это означает, что дисперсии значимо отличаются друг от друга, т.е. что они неоднородны [6].

Если сравниваемое количество дисперсий больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные, используют критерий Кохрена. Этот критерий пригоден для случая, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов. При этом подсчитывается дисперсия в каждой горизонтальной строке матрицы. Из всех дисперсий горизонтальных строк матрицы находится наибольшая $S^2 = \max$, которая делится на сумму всех дисперсий. ***Критерий Кохрена*** – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий [6]

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{g=1}^{N} S_g^2}.$$

С этим критерием связаны числа степеней свободы $f_1 = n - 1$ и $f_2 = N$. Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения (таблица 10), тогда можно определить ***дисперсию воспроизводимости***.

Таблица 10

Значение критерия Кохрена для уровня значимости 0,05

Число степеней свободы знаменателя f_2	Число степеней свободы числителя f_1			
	1	2	3	4
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457
4	0,8065	0,7679	0,6841	0,6287
5	0,8412	0,6838	0,5984	0,5440
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3010
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,5584
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880

6.6. Рандомизация

Планированием эксперимента можно исключить из результата опытов ошибку, которую вносят неоднородности дискретного и непрерывного типов. ***Неоднородности дискретного типа*** — это различия в перерабатываемом сырье. Различия в машинах, операторах, способах проведения процессов, величине напряжения в электрической сети при работе установок с электродвигателем являются также дискретными неоднородностями в эксперименте.

Однако большее искажение результатов эксперимента создают ***неоднородности непрерывного типа***, вызывающие непрерывные изменения свойств объектов — временной дрейф. Особое искажение в результатах исследований в тех случаях, когда проведение экспериментов затягивается во времени. Поэтому действие временного дрейфа можно уменьшить ускорением эксперимента, но часто это невозможно осуществить из-за большой переналадки экспериментальной установки или ожидания анализов предыдущего опыта для постановки последующего. Построение планов, исключающих действие неоднородностей типа дрейфа, изложено в работе [6]. При планировании эксперимента очень важно рандомизировать порядок проведения опытов, т.е. расположить их один за другим в процессе исследования в случайном порядке (от англ. random — случайный). Это особенно важно при наличии большой неоднородности влияния неконтролируемых и неуправляемых факторов на отклик и большой неоднородности условий эксперимента. Рандомизация проведения опытов обеспечивает равномерное внесение элемента случайности влияния неуправляемых и неконтролируемых факторов на отклик, позволяет обоснованно использовать аппарат математической статистики при обработке результатов эксперимента. Имеется несколько способов рандомизации (бросание монеты, вытаскивание наугад карточек с номерами и т.д.), но лучшим является использование таблиц случайных чисел, которые приводятся во многих книгах по математической статистике.

При использовании таблицы случайных чисел необходимо пронумеровать рандомизируемые объекты. В случайном месте таблицы выписываются числа с 1 по N с отбрасыванием чисел больше N и уже выписанных. Например, требуется расположить в случайном порядке цифры от 0 до 10. Выбираем 4-й столбец и получаем следующий рандомизированный ряд: 3, 0, 10, 1, 8, 7, 2, 6, 9, 5, 4. Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

6.7. Выбор числа повторностей опыта

При планировании эксперимента решается вопрос о ***числе повторностей опыта*** при определении той или иной измеряемой величины. Один из методов определения необходимого числа повторностей или объема выборки заключается в следующем.

Допустим, определяется средняя арифметическая величина многократных измерений одного и того же объекта. Для определения количества повторностей измерений необходимо задаться следующими величинами.

1. ***Надежность результатов опыта*** - α, с помощью которой можно установить доверительный интервал значений измеряемой величины. Показатель α еще называется доверительной вероятностью, т.е. вероятностью того, что значения измеряемой величины y не выйдут за доверительные пределы $\pm\Delta y$, определяемые доверительной вероятностью. Чем выше требуется надежность, тем больше (шире) получится доверительный интервал, и чем больше задается доверительный интервал, тем вероятнее, что результаты измерений не выйдут за его пределы [4].

При обычных исследованиях в технике для нахождения зависимостей влияния различных факторов достаточна доверительная вероятность 0,7...0,9. При изучении же характеристик приборов нужна более высокая надежность — 0,95...0,99. Чем выше надежность результатов, тем больше требуется повторность опытов.

2. ***Допустимая ошибка*** — ε, выраженная в долях среднеквадратического отклонения σ. Результаты многократных измерений одной и той же величины должны лежать в пределах $\pm 3\sigma$. Поэтому если заранее не известно, в каких пределах должна изменяться измеряемая величина, то можно для сокращения числа повторностей задаться ошибкой $\pm 3\sigma$.

Таблица 11

Необходимое количество повторностей опытов

Предельная ошибка ε в долях σ	Доверительная вероятность α					
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
3,0	1	1	2	3	4	5
2,0	1	2	3	4	5	7
1,0	3	4	5	7	11	17
0,5	6	9	13	18	31	50
0,4	8	12	19	27	46	74
0,3	13	20	32	46	78	127
0,2	29	43	70	99	171	277
0,1	169	266	273	378	668	1089
0,05	431	659	1084	1540	2659	4338
0,01	10732	16436	27161	38416	66358	108307

Практическая необходимость в конкретных условиях определяет допустимую ошибку дальнейших исследований.

В таблице 11 приведены значения числа повторностей опыта в зависимости от выбранных доверительной вероятности α и допустимой ошибки ε.

Пример пользования таблицей 11. Требуется определить число измерений температуры воды ртутным термометром. Для этого принимаем доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$ и ошибку $\varepsilon = \pm 3\sigma$, где σ — среднеквадратическое отклонение результатов опытов. В пересечении столбца $\alpha = 0{,}95$ и строки $\varepsilon = \pm 3\sigma$ получаем число измерений, равное 3.

Если заранее известно, что термометр сам имеет предельную погрешность измерения 1°, что составляет, допустим, $0{,}5\sigma$, то при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ требуется сделать 18 измерений.

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

7.1. Метод наименьших квадратов

Основным методом обработки экспериментальных данных, полученных при планировании эксперимента, является статистический метод, называемый ***методом наименьших квадратов***. Он позволяет вычислять коэффициенты регрессии и проводить статистические оценки адекватности и значимости.

Метод наименьших квадратов — эффективный и простой способ получения оценок коэффициентов регрессии. Эти оценки приводят к минимально возможной остаточной сумме квадратов и в этом смысле являются оптимальными.

Для любого числа факторов коэффициенты регрессии будут вычисляться по формуле [1]

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N},$$

где $j = 0,1,2,\ldots,k.$ - номера факторов.

Метод наименьших квадратов является частью регрессионного анализа при проверке статистических гипотез. При этом должны выполняться следующие ***постулаты:*** 1) параметр оптимизации — случайная величина с нормальным законом распределения; 2) дисперсия параметра оптимизации не зависит от значений параметра оптимизации; 3) значения факторов — не случайные величины; 4) факторы коррелированны. Если постулаты выполняются, то можно проводить проверку адекватности модели и значимости коэффициентов регрессии.

7.2. Проверка адекватности модели

После вычисления коэффициентов модели необходимо проверить ее пригодность. Такая проверка называется ***проверкой адекватности модели***. Адекватность модели оценивается остаточной дисперсией или дисперсией адекватности. ***Дисперсия адекватности*** - это остаточная сумма квадратов, деленная на число степеней свободы [1]:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2}{f},$$

где f - число степеней свободы, равное разности между числом опытов и количеством коэффициентов, которые уже вычислены по результатам этих опытов независимо друг от друга

$$f = N - (k+1).$$

Для проверки гипотезы об адекватности используется F-критерий Фишера, который уже применялся для сравнения двух дисперсий

$$F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\{y\}}^2}.$$

Расчетное значение сравнивается с табличным. Если расчетное значение не превышает табличного, с соответствующей доверительной вероятностью модель можно считать адекватной. Фрагмент соответствующей таблицы приведен ниже (таблица 12).

Таблица построена следующим образом. Столбцы связаны с определенным числом степеней свободы для числителя f_1, строки — для знаменателя f_2.

$$f_1 = N - (k+1),$$

$$f_2 = N(n-1).$$

На пересечении соответствующих строки и столбца стоят критические значения F-критерия. Как правило, в технических задачах используется уровень значимости 0,05.

Таблица 12

Значения F-критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

f_1	f_2								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**12**	**24**	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2

7.3. Проверка значимости коэффициентов

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо. Прежде всего надо найти ***дисперсию коэффициента регрессии*** $S^2\{b_j\}$. Она определяется по формуле

$$S^2\{b_j\} = \frac{S^2\{y\}}{N}.$$

Затем необходимо построить ***доверительный интервал*** Δb_j

$$\Delta b_j = \pm t S\{b_j\},$$

где t — табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы, с которыми определялась $S^2\{y\}$, и выбранном уровне значимости (обычно 0,05)

$$f = N(m-1);$$

$S\{b_j\}$ — квадратичная ошибка коэффициента регрессии

$$S\{b_j\} = +\sqrt{S^2\{b_j\}}.$$

Коэффициент значим, если абсолютная величина больше доверительного интервала. Доверительный интервал задается верхней и нижней границами $b_j + \Delta b_j$ и $b_j - \Delta b_j$.

Значение t-критерия выбирается из таблицы 13. Столбцы таблицы соответствуют различным степеням свободы и значениям критерия.

Чем уже доверительный интервал (при заданном α), тем больше значимость коэффициента.

Существует рабочее правило: если абсолютная величина коэффициента больше, чем доверительный интервал, то коэффициент значим.

Таблица 13

Значения t-критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	**Значение t - критерия**
1	12,71
2	4,303
3	3,182
4	2,776
5	2,571
6	2,447
7	2,365
8	2,306
9	2,262
10	2,228
11	2,201
12	2,179
13	2,160

Обработка результатов эксперимента проводится по следующему плану.

1. Оценка дисперсий среднего арифметического в каждой строке матрицы.
2. Проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена.
3. Если дисперсии однородны, то проводится расчет оценки дисперсии воспроизводимости.
4. Определение коэффициентов регрессии.
5. Проверка адекватности модели.
6. Проверка значимости коэффициентов регрессии.

Расчетные формулы приводятся в соответствии с указанным планом:

1. $$S^2 = \frac{\sum_{g=1}^{n} \left(y_g - \bar{y}\right)^2}{n-1};$$

2. $$G = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{g=1}^{N} S_g^2};$$

3. $$S^2_{\{y\}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{g=1}^{n} \left(y_{ig} - \bar{y}_i\right)^2}{N\left(n-1\right)};$$

4. $$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N};$$

5. $$S^2_{\text{ад}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{f},\ f = N - \left(k+1\right),\ F = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\{y\}}};$$

6. $$S^2_{\{b_j\}} = \frac{S^2_{\{y\}}}{N},\ \Delta b_j = \pm t S_{\{b_j\}}$$

8. ПРИМЕР. ОПТИМИЗАЦИЯ БОКОВОГО ОБТЕКАТЕЛЯ КАБИНЫ ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ

При разработке конструкции современных большегрузных автомобилей значительную часть объема научно-исследовательской работы составляют исследования аэродинамических характеристик кабин. Цель таких исследований: минимизация лобового (аэродинамического) сопротивления, отложений пыли, грязи и снега на боковых поверхностях кабины и кузова, лобовом и боковых стеклах; обеспечение комфортного микроклимата на рабочем месте водителя; повышение эффективности системы охлаждения двигателя за счет рационального использования энергии набегающего потока и т.д. Натурные испытания КамАЗа дали возможность оценить влияние бокового обтекателя кабины на структуру потока, обтекающего ее боковую поверхность и зону колесной ниши, т.е. решить проблему защиты дверей, боковых стенок кабины и внешних зеркал заднего вида от грязи и воды, поднимаемых передними колесами при движении автомобиля. Для устранения этого явления в конструкциях грузовых автомобилей применяют боковые обтекатели (рисунок 8).

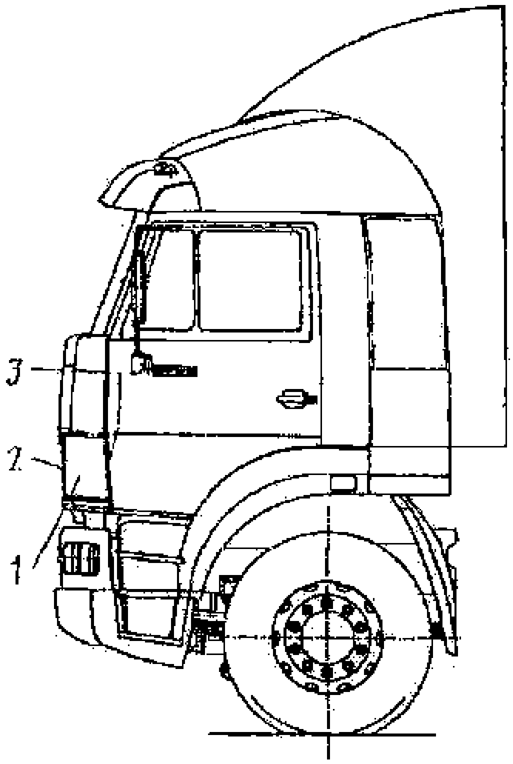

Рис. 8. Кабина с боковым обтекателем:
1 — боковой обтекатель;
2 — входное его сечение;
3 — выходное его сечение

Найдено решение, позволяющее "подгонять" обтекатели к автомобилю таким образом, чтобы они в любых условиях работали наиболее эффективно. Для этого проводились специальные исследования, в ходе которых было установлено, что эффективность бокового обтекателя зависит от формы его поверхности, размеров входного и выходного сечений, а также конфигурации передней панели кабины и скорости движения автомобиля. Другими словами, удалось получить качественную зависимость между конструкцией обтекателя и его эффективностью.

Для получения количественной зависимости использовалась теория планирования многофакторного эксперимента, так как она дает возможность построить математическую модель изучаемого явления, значительно сократить число опытов и достаточно точно оптимизировать геометрические параметры обтекателя.

К независимым ***факторам***, определяющим характер обтекания боковых поверхностей кабины и колесных ниш, были отнесены те параметры, к которым эффективность обтекателя оказалась наиболее чувствительной. Это скорость движения автомобиля, ширина h_1 входного и h_2 выходного сечений обтекателя. В качестве ***функции отклика***, или оптимизационного параметра, взяли объемный расход Q воздуха на выходе обтекателя.

Объемный расход Q воздуха можно измерить непосредственно, но можно и вычислить по формуле

$$Q = V_в S_{вых} = V_в L h_2 \,,$$

где $V_в$ - средняя скорость воздуха на выходе из обтекателя;
$S_{вых}$ - площадь выходного сечения обтекателя;
L и h_2 - соответственно его высота и ширина.
Причем вычисление гораздо проще измерения.

Три составляющих ($S_{вых}, L$ и h_2) от скорости движения не зависят, а определяются лишь конструкцией обтекателя. И только одна, $V_в$, зависит и от его конструкции, и от скорости движения автомобиля. Поэтому в ходе экспериментов варьировали именно $S_{вых}, L$ и h_2, а $V_в$ измеряли. Причем принимали эту скорость равной среднеарифметической для трех (1, 2 и 3) точек (рисунок 9), которые выбраны таким образом, чтобы исключить влияние внутренних стенок обтекателя, т.е. пограничного слоя воздушного потока.

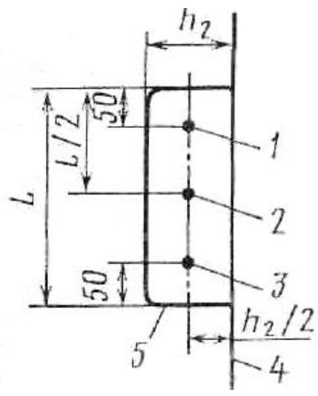

Рис. 9. Схема измерения скоростей воздушного потока в выходном сечении бокового обтекателя:
1, 2 и 3 — точки измерения скорости потока;
4 — боковая поверхность кабины;
5 — обтекатель

Скорости потока в этих точках измеряли с помощью пневмометрических трубок Пито-Прандля и блока U-образных пьезометров. Для этого определяли перепад между полным и статическим давлениями в коленах пьезометра, а затем с помощью уравнения Бернулли вычисляли скорость потока, а по ней — расход Q воздуха через выходное сечение обтекателя. В итоге при $L = const$ оптимизационная задача свелась к определению таких величин параметров h_1 и h_2, при которых расход воздуха через данное сечение был бы максимальным.

Расчет вели по математической модели $Q = f(v, h_1, h_2)$, для построения которой использовали ротатабельный центральный композиционный план эксперимента второго порядка. Его матрица приведена в таблице 14. Из нее видно, что каждый из факторов (x_1, x_2 и

Таблица 14

Номер опыта	Уровень факторов в кодированных и натуральных переменных						Функция отклика Q, м^3/с
	x_1	$V_в$, км/ч	x_2	h_1, м	x_3	h_2, м	
1	+1	80	+1	0,06	+1	0,039	Q_1
2	-1	40	+1	0,06	+1	0,039	Q_2
3	+1	80	-1	0,04	+1	0,039	Q_3
4	-1	40	-1	0,04	+1	0,039	Q_4
5	+1	80	+1	0,06	-1	0,019	Q_5
6	-1	40	+1	0,06	-1	0,019	Q_6
7	+1	80	-1	0,04	-1	0,019	Q_7
8	-1	40	-1	0,04	-1	0,019	Q_8
9	0	60	0	0,05	0	0,029	Q_9

x_3) варьировался на трех уровнях — верхнем (+1), нулевом (0) и нижнем (—1). Результаты определения осредненных величин скорости $v_в$ потока и расхода воздуха в выходном сечении обтекателя для нескольких исследованных соотношений h_1 и h_2, а также трех режимов движения (со скоростями 40, 60 и 80 км/ч) приведены в таблице 15. Опыты № 1 и 2 соответствуют исходной конструкции обтекателя [2].

Обработку результатов измерений, построение математической модели, проверку ее адекватности вели с использованием известных положений теории планирования эксперимента.

Так, функцию отклика представляли неполным квадратным уравнением регрессии вида

$$Q = b_0 + \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + \sum b_i x_i x_j \, ;$$

входящие в него коэффициенты b_0, b_i и b_j рассчитывали по формулам

Таблица 15

Номер опыта	Размер обтекателя		Скорость движения $V_в$, км/ч	$S_{вых}$, м^2	Средняя скорость $v_в$ потока в выходном сечении обтекателя, м/с, в точках			Осредненная по сечению скорость $v_в$ потока, м/с	Объемный расход воздуха через обтекатель, м^3/с
	h_1	h_2			1	2	3		
1	0,04	0,019	80	0,0123	22,4	24,5	24,6	23,9	0,294
2	0,04	0,019	40	0,0123	12,3	13,0	11,6	12,3	0,152
3	0,06	0,039	80	0,0287	27,3	24,3	24,3	23,7	0,681
4	0,06	0,039	40	0,0287	11,0	11,7	12,0	11,5	0,330
5	0,04	0,039	80	0,0287	21,5	21,9	22,6	22,0	0,632
6	0,04	0,039	40	0,0287	9,4	12,3	11,7	11,2	0,321
7	0,06	0,019	80	0,0123	27,1	25,3	25,0	25,8	0,317
8	0,06	0,019	40	0,0123	12,6	13,3	12,0	12,7	0,156
9	0,05	0,029	60	0,0203	16,4	17,9	18,3	17,5	0,356

$$b_0 = \frac{1}{9}\sum Q_i\ ;\ b_i = \frac{1}{9}\sum x_{ij} Q_i\ ;\ b_{ij} = \frac{1}{9}\sum x_{ik} x_{kh} Q_i\ ;$$

дисперсию S_k^2 повторных опытов, характеризующую степень рассеяния экспериментальных данных при нулевом уровне факторов, — по формуле

$$S_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i \left(Q_{ki} - \overline{Q}_k\right)^2,$$

где Q_{ki} — результат отдельного опыта;

Q_k - среднеарифметическое повторных опытов;

$i = 1,2,...,n$ - число повторных опытов;

дисперсию S_Q^2 воспроизводимости (или дисперсии параметра оптимизации) — по формуле

$$S_Q^2 = \frac{1}{9}\sum S_k^2 .$$

Адекватность модели проверяли по критерию Фишера, а значимость коэффициентов модели оценивали по t-критерию.

Результаты расчета коэффициентов уравнения регрессии следующие:

$$b_0 = 0{,}36\,;\ b_1 = 0{,}107\,;\ b_2 = 0{,}009\,;\ b_3 = 0{,}116\,;$$

$$b_{12} = 0{,}006\,;\ b_{13} = 0{,}004\,;\ b_{23} = 0{,}003\,.$$

После проверки адекватности математической модели $Q = f(V, h_1, h_2)$ и оценки значимости ее коэффициентов сделаны следующие выводы: полученная модель адекватна, а коэффициенты b_{12} и b_{23} — незначимы. После их исключения из рассмотрения получается окончательное уравнение для параметра оптимизации. Оно следующее [2]:

$$Q = 0{,}36 + 0{,}107\,x_1 + 0{,}009\,x_2 + 0{,}116\,x_3 + 0{,}04\,x_1 x_3\,.$$

Как видим, наибольшее влияние на величину расхода воздуха через обтекатель оказывает ширина h_2 выходного сечения. Второй по значимости фактор — скорость движения автомобиля. А меньше всего на величине Q сказывается ширина h_1 входного сечения.

Знание данных закономерностей позволило воспользоваться методом движения по градиенту функции отклика, определяемому коэффициентами линейной модели b_1, b_2 и b_3 оптимизировать геометрические размеры обтекателя. В результате оптимизации получено: $h_1 = 58\,мм$, $h_2 = 42\,мм$. При таких параметрах расход воздуха через обтекатель при скорости движения 80 км/ч составил 0,698 м^3/с, а при 40 км/ч — 0,367 м^3/с. То есть по сравнению с исходной конструкцией обтекателя (опыты 1 и 2) расход воздуха увеличился в среднем в 2,4 раза.

Окончательная проверка эффективности оптимизированного бокового обтекателя проведена в процессе сравнительных пробеговых испытаний двух автомобилей КамАЗ одной модели. Один из них был оборудован обтекателями исходной конструкции, а второй — оптимизированными. Автомобили двигались на расстоянии 150 — 200 м друг от друга по кольцевому маршруту протяженностью 160 км (шоссе — мокрое) со скоростью 60 ± 3 км/ч, меняясь через каждые 10 км местами. Установлено: оптимизированные обтекатели снижают площадь загрязнения боковой поверхности кабины более чем в 2 раза.

9. ТЕСТЫ (вопросы для самоконтроля)

Тема: Основные определения

1. Процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленных задач с требуемой точностью

а) построение модели;
б) исследование процесса;
в) планирование эксперимента.

2. Наилучшие условия протекания процесса

а) оптимальные условия;
б) условия эксперимента;
в) область значений фактора.

3. Эксперимент, который ставится для решения задачи оптимизации

а) интерполяционный;
б) экстремальный;
в) экстраполяционный.

4. Задача поиска экстремума некоторой функции

а) интерполяционная;
б) экстремальная;
в) экстраполяционная.

5. Задача поиска связи между параметром и факторами

а) интерполяционная;
б) экстремальная;
в) экстраполяционная.

6. Кибернетическая система, описывающая объект исследования

а) система уравнений;
б) «черный ящик»;
в) функциональная зависимость.

7. Уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами

а) математическая модель;
б) экспериментальная модель;
в) модель процесса.

8. Эксперимент типа p^k

а) p – число факторов, k – число уровней факторов;

б) p – число уровней факторов, k – число факторов;

в) p – число параметров, k – число уровней параметров

9. Выберем некоторые уровни для всех факторов. В этих условиях проведем эксперимент. Затем повторим его несколько раз через неравные промежутки времени и сравним значения параметра оптимизации

а) воспроизводимость;

б) повторность;

в) управляемость.

10. Активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес

а) воспроизводимость;

б) повторность;

в) управляемость.

11. Метод выбора количества и условий проведения опытов, минимально необходимых для отыскания оптимальных условий

а) планирование экстремального эксперимента;

б) планирование интерполяционного эксперимента;

в) планирование экстраполяционного эксперимента.

12. Построение физической модели процесса на основании тщательного изучения механизма явления

а) дифференцированный подход;

б) детерминированный подход;

в) стохастический подход.

Тема: Параметр оптимизации

13. Характеристика цели, заданная количественно

а) фактор;

б) параметр оптимизации;

в) критерий оптимизации.

14. Реакция системы на воздействия, которые определяют ее поведение

а) фактор;

б) параметр оптимизации;

в) критерий оптимизации.

15. Число станков в цехе

а) непрерывная ограниченная область определения;

б) дискретная ограниченная область определения;

в) дискретная неограниченная область определения.

16. Себестоимость
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

17. Рентабельность
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

18. Затраты на эксперимент
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

19. Параметр оптимизации оказывает влияние на
а) поведение «черного ящика»;
б) факторы;
в) на вид математической модели.

20. Прибыль
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

21. Производительность
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

22. Стабильность
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

23. Долговечность
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

24. Коэффициент полезного действия
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

25. Физические характеристики продукта
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) технико-технологический параметр оптимизации.

26. Выход продукта
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) технико-технологический параметр оптимизации.

27. Из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями
а) регрессионный анализ;
б) корреляционный анализ;
в) интерполяционный анализ.

28. Надежность
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) статистический параметр оптимизации.

29. Механические характеристики продукта
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) технико-технологический параметр оптимизации.

30. Физико-химические характеристики продукта
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) технико-технологический параметр оптимизации.

31. Медико-биологические характеристики продукта
а) экономический параметр оптимизации;
б) технико-экономический параметр оптимизации;
в) технико-технологический параметр оптимизации.

32. Число ошибочных действий в различных возможных ситуациях
а) статистический параметр оптимизации;
б) психологический параметр оптимизации;
в) эстетический параметр оптимизации.

33. Присвоение параметру оптимизации оценки по заранее выбранной шкале
а) ранжирование;

б) корреляция;
в) регрессия.

34. Выбор параметра оптимизации, который определяется с наиболее возможной точностью
а) оценка эффективности функционирования системы;
б) однозначность в статистическом смысле;
в) эффективность в статистическом смысле.

35. Способность параметра оптимизации всесторонне характеризовать объект
а) универсальность;
б) однозначность;
в) эффективность.

36. С ростом значений одного параметра возрастает значение другого параметра
а) $r_{y_1 y_2} = +1;$
б) $r_{y_1 y_2} = 0;$
в) $r_{y_1 y_2} = -1.$

37. С ростом значения одного параметра уменьшается значение другого параметра
а) $r_{y_1 y_2} = +1;$
б) $r_{y_1 y_2} = 0;$
в) $r_{y_1 y_2} = -1.$

Тема: Факторы

38. Способ воздействия на объект
а) фактор;
б) параметр;
в) отклик.

39. Изменяемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенны значения
а) фактор;
б) параметр;
в) отклик.

40. Фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений
а) уровень;

б) область определения;
в) область значений.

41. Фиксированный набор уровней факторов
а) область определения;
б) область значений;
в) условия проведения одного из возможных опытов.

42. Последовательность действий, с помощью которых устанавливаются конкретные значения фактора
а) управляемость;
б) операциональность;
в) точность.

43. Непосредственное воздействие фактора на объект
а) операциональность;
б) точность;
в) однозначность.

44. Все комбинации факторов осуществимы и безопасны
а) совместимость;
б) независимость;
в) однозначность.

45. Возможность установления фактора на любом уровне независимо от уровня других факторов
а) совместимость;
б) независимость;
в) однозначность.

46. Эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор
а) нелинейность;
б) ортогональность;
в) ротатабельность.

47. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации
а) корреляция;
б) однозначность;
в) регрессия.

Тема: Выбор модели

48. Информация, содержащая в себе результаты предыдущих исследований

а) рандомизированная;

б) априорная;

в) регрессионная.

49. Коэффициенты линейной модели при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента

а) тем большее влияние оказывает фактор;

б) тем меньшее влияние оказывает фактор;

в) роли не играет.

50. Коэффициенты линейной модели при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации

а) уменьшается;

б) увеличивается;

в) не изменяется.

51. Коэффициенты линейной модели при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Если коэффициент имеет знак минус, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации

а) уменьшается;

б) увеличивается;

в) не изменяется.

52. Коэффициенты линейной модели при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем меньше численная величина коэффициента

а) тем большее влияние оказывает фактор;

б) тем меньшее влияние оказывает фактор;

в) роли не играет.

53. Непрерывность поверхности отклика, ее гладкость и наличие единственного оптимума

а) постулаты, позволяющие представить функцию отклика в виде аналитической функции;

б) постулаты, позволяющие представить функцию отклика в виде статистической функции;

в) постулаты, позволяющие представить функцию отклика в виде геометрической функции.

54. В некоторой экспериментальной подобласти предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического больше, чем на некоторую заранее заданную величину

а) детерминистская модель;

б) стохастическая модель;

в) адекватная модель.

55. Направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации

а) направление вектора;

б) направление градиента;

в) направление адекватности.

Тема: Полный факторный эксперимент

56. Геометрический аналог функции отклика

а) факторное пространство;

б) гиперкуб;

в) поверхность.

57. Пространство, в котором строится поверхность отклика

а) оптимальное пространство;

б) факторное пространство;

в) пространство параметра оптимизации.

58. Предсказание результатов опытов в точках, которые лежат внутри подобласти

а) корреляция;

б) интерполяция;

в) экстраполяция.

59. Предсказание результатов опытов в точках, которые лежат вне подобласти

а) корреляция;

б) интерполяция;

в) экстраполяция.

60. Метод поиска оптимума состоит в том, что сначала последовательно изменяются значения одного фактора и фиксируется наилучшее из них. В этих условиях последовательно изменяются значения второго фактора и т.д.

а) метод Гаусса-Зейделя;

б) шаговая процедура;

в) метод Фишера.

61. Метод поиска оптимума состоит в том, что сначала изучается локальная область, затем определяется наиболее интересное направление и в этом направлении ставятся следующие опыты

а) метод Гаусса-Зейделя;

б) шаговая процедура;

в) метод Фишера.

62. Исходная точка для построения плана эксперимента

а) основной уровень фактора;

б) верхний уровень фактора;

в) нижний уровень фактора.

63. Расстояние на координатной оси между основным и верхним уровнями факторов

а) интервал варьирования;

б) интервал ранжирования;

в) интервал регрессии.

64. Выбор основного уровня фактора: известна наилучшая точка

а) точка принимается за основной уровень;

б) нулевой уровень перемещается внутрь области;

в) выбирается наилучшая точка.

65. Выбор основного уровня фактора: известна область определения и наилучшая точка, которая лежит внутри области

а) точка принимается за основной уровень;

б) нулевой уровень перемещается внутрь области;

в) выбирается наилучшая точка.

66. Выбор основного уровня фактора: известна область определения и наилучшая точка, которая лежит на границе области

а) точка принимается за основной уровень;

б) нулевой уровень перемещается внутрь области;

в) выбирается наилучшая точка.

67. Выбор основного уровня фактора: известно несколько наилучших точек, имеются специальные соображения по выбору одной из точек

а) точка принимается за основной уровень;

б) нулевой уровень перемещается внутрь области;

в) выбирается наилучшая точка.

68. Выбор основного уровня фактора: известно несколько наилучших точек, ни одной из точек нельзя отдать предпочтение

а) выбирается случайная точка;

б) выбирается центр подобласти;

в) выбирается случайная точка в подобласти.

69. Выбор основного уровня фактора: известна подобласть, в которой процесс протекает достаточно хорошо

а) выбирается случайная точка подобласти;

б) ставится несколько планов для нескольких точек подобласти;

в) выбирается центр подобласти.

70. Выбор основного уровня фактора: известна подобласть, в которой процесс протекает достаточно хорошо

а) выбирается случайная точка;

б) выбирается случайная точка в подобласти;

в) ставится несколько планов для нескольких точек подобласти.

71. Выбор основного уровня фактора: известно несколько наилучших точек, ни одной из точек нельзя отдать предпочтение

а) выбирается наилучшая точка;

б) выбирается центр подобласти;

в) ставится несколько планов для разных точек.

72. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

73. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

74. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

75. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;
в) узкий.

76. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

77. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

78. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

79. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

80. Принятие решения об интервале варьирования при низкой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

81. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, линейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

82. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, линейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

83. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, линейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

84. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

85. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

86. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

87. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

88. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

89. Принятие решения об интервале варьирования при средней точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

90. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

91. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

92. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, линейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

93. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

94. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации
а) широкий;
б) средний;
в) узкий.

95. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, нелинейной поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

96. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и широком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

97. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и узком диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

98. Принятие решения об интервале варьирования при высокой точности фиксирования фактора, неизвестной кривизне поверхности и неизвестном диапазоне изменения параметра оптимизации

а) широкий;

б) средний;

в) узкий.

99. Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов

а) дробный факторный эксперимент;

б) многофакторный эксперимент;

в) полный факторный эксперимент.

100. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^2

а) квадрат;

б) куб;

в) гиперкуб.

101. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^3

а) квадрат;

б) куб;

в) гиперкуб.

102. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^5

а) квадрат;

б) куб;

в) гиперкуб.

103. Алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора в матрице планирования эксперимента равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0,\ j = 1 \ldots k$$

а) симметричность относительно центра эксперимента;

б) условие нормировки;

в) ортогональность матрицы планирования.

104. Сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = 0,\ j = 1 \ldots k$$

а) симметричность относительно центра эксперимента;

б) условие нормировки;

в) ортогональность матрицы планирования.

105. Сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0,\ j \neq u, u = 0 \ldots k$$

а) симметричность относительно центра эксперимента;

б) условие нормировки;

в) ортогональность матрицы планирования.

106. Точки в матрице планирования эксперимента подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления

а) симметричность относительно центра эксперимента;

б) ротатабельность;

в) ортогональность матрицы планирования.

107. Ортогональность матрицы планирования позволяет получить

а) зависимые друг от друга оценки коэффициентов;

б) независимые друг от друга оценки коэффициентов;

в) коэффициенты при квадратах факторов.

108. Коэффициент b_0 линейной модели

а) общая оценка;
б) оценка квадратичных членов;
в) смешанная оценка.

109. Сумма всех отдельных результатов опытов, деленная на количество параллельных опытов
а) среднее квадратическое отклонение;
б) среднее арифметическое;
в) дисперсия.

110. Среднее значение квадрата отклонения величины от ее среднего значения
а) среднее квадратическое отклонение;
б) среднее арифметическое;
в) дисперсия.

111. Корень квадратный среднего значения квадрата отклонения величины от ее среднего значения
а) среднее квадратическое отклонение;
б) среднее арифметическое;
в) дисперсия.

112. Случайная последовательность при постановке опытов, запланированных матрицей
а) ортогональность;
б) рандомизация;
в) ротатабельность.

10. ВОПРОСЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

Тема: Основные определения

1. Дайте определение планирования эксперимента.
2. Какая задача называется задачей оптимизации?
3. Какие виды задач оптимизации решаются с использованием теории планирования эксперимента?
4. Как представляют объект исследования в планировании эксперимента?
5. Что такое функция отклика?
6. Как определяется число возможных опытов?
7. Перечислите требования, предъявляемые к объекту исследования.

Тема: Параметр оптимизации

1. Дайте определение параметра оптимизации.
2. Перечислите виды параметров оптимизации.
3. Перечислите требования, предъявляемые к параметру оптимизации.
4. С какой целью проводится корреляционный анализ?
5. В каких пределах изменяется значение коэффициента парной корреляции?

Тема: Факторы

1. Дайте определение фактора.
2. Какая область определения фактора используется в планировании эксперимента?
3. Какие факторы называются качественными?
4. Перечислите требования, предъявляемые к фактору.
5. Перечислите требования, предъявляемые к совокупности факторов.

Тема: Выбор модели

1. Что такое поверхность отклика?
2. С какой целью строится математическая модель?
3. Постулаты о свойствах поверхности отклика.
4. Шаговый принцип движения по поверхности отклика.
5. В чем заключаются процессы интерполяции и экстраполяции?
6. Какие требования предъявляются к математической модели процесса?
7. Каким моделям отдается предпочтение на первом этапе исследования?

Тема: Полный факторный эксперимент

1. Какие ограничения учитываются при выборе значений факторов?
2. Какая информация называется априорной?
3. Что такое интервал варьирования фактора?
4. Какие уровни факторов существуют?
5. Какие ограничения учитываются при выборе интервалов варьирования?
6. Чем определяется точность фиксирования фактора, и какие уровни точности установлены?
7. Дайте определение полного факторного эксперимент типа 2^k.
8. Что такое матрица планирования эксперимента?
9. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^k.

10. Как построить матрицу планирования эксперимента типа 2^k?
11. Укажите свойства матрицы планирования эксперимента.
12. Как вычислить оценки коэффициентов математической модели?
13. Что такое эффект фактора?
14. Как определить полное число всех возможных эффектов?

Тема: Проведение эксперимента

1. Что такое дисперсия?
2. Что такое среднее квадратическое отклонение?
3. Какие виды ошибок результатов измерения существуют?
4. Как проверить однородность дисперсии?
5. С какой целью проводится рандомизация?
6. Как определить количество повторностей опытов?

Тема: Обработка результатов эксперимента

1. В чем заключается сущность метода наименьших квадратов?
2. Преимущества метода наименьших квадратов.
3. Постулаты регрессионного анализа.
4. Как проверить адекватность модели?
5. Как проверить значимости коэффициентов?

11. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ 1

1. Выбрать статью в научно-техническом журнале (например, «Автомобильная промышленность», «Автотранспорт», «Автотранспортное предприятие», «Тракторы и сельскохозяйственные машины» и др.) или в другом источнике (сборники трудов, научные вестники, сайты в Internet), посвященную научному исследованию какой-либо технической системы.
2. Изучить статью.
3. Ответить на вопросы:

3.1. Какая научная проблема решается в рассматриваемой статье?

3.2. Что является целью данного научного исследования?

3.3. Что является объектом исследования в рассматриваемой статье?

3.4. Перечислите факторы, оказывающие влияние на исследуемый процесс. Какие из них включены в эксперимент и почему?

3.5. Какие параметры характеризуют изучаемый процесс? Какие из параметров измеряются (отслеживаются) в ходе исследования?

3.6. Укажите результаты рассматриваемого научного исследования.

ЗАДАНИЕ 2

Провести корреляционный анализ параметров процесса по следующим этапам.

1. Вычислить коэффициент парной корреляции между случайными величинами.
2. Проверить значимость коэффициента парной корреляции.
3. Проверить гипотезу корреляционной линейной связи между всевозможными парами параметров.

Варианты задания приведены в таблицах 17, 18, 19.

ЗАДАНИЕ 3

Проверить выполнение свойств полного факторного эксперимента типа 2^3:

1. симметричность относительно центра эксперимента;
2. условие нормировки;
3. ортогональность матрицы планирования.

Варианты задания приведены в таблице 20.

ЗАДАНИЕ 4

1. Определить дисперсию параллельных опытов.
2. Проверить гипотезу об однородности дисперсий.
3. Определить дисперсию воспроизводимости.

Исходные данные и промежуточные расчеты поместить в таблицу 16.

Варианты задания приведены в таблице 21.

Таблица 16

Вычисление дисперсии параметра оптимизации

Номер опыта	**Значение параметра оптимизации**			$\bar{y}$	$\sum_{g=1}^{3}(y_g-\bar{y})$	$\sum_{g=1}^{3}(y_g-\bar{y})^2$	S^2
	y'	y''	y'''				
$\sum_{N=1}^{8}\sum_{g=1}^{3}(y_g-\bar{y})^2$							

Таблица 17

Исходные данные для задания 2

Вариант задания	**Номер опыта**	**Время ремонта, мин. ($У_1$)**	**Время полной разборки аппарата, мин. ($У_2$)**	**Вероятность годности деталей и их повторного исследования ($У_3$)**
1	1	440	103,9	0,65
	2	452	108,6	0,76
	3	436	100,4	0,69
	4	480	117,1	0,85
	5	464	108,3	0,80
	6	452	105,8	0,72
	7	440	100,9	0,66
	8	448	104,6	0,69
	9	452	103,3	0,74
2	1	448	105,7	0,72
	2	440	106,2	0,68
	3	452	108,4	0,77
	4	464	111,2	0,83
	5	452	109,2	0,79
	6	464	113,6	0,81
	7	448	105,9	0,70
	8	435	102,7	0,68
	9	452	110,5	0,75
3	1	448	104,6	0,66
	2	452	103,3	0,69
	3	464	107,5	0,74
	4	448	106,0	0,82
	5	452	110,5	0,71
	6	435	102,7	0,75
	7	448	105,9	0,68
	8	464	113,6	0,70
	9	452	109,2	0,81

Таблица 18

Исходные данные для задания 2

Вариант задания	**Номер выборки**	**Время технического обслуживания, мин. ($У_1$)**	**Время поиска неисправности и ее устранение, мин. ($У_2$)**	**Время на обеспечение ЗИП, мин. ($У_3$)**
4	1	6	90	50
	2	5	110	45
	3	4	85	35
	4	6	76	20
	5	3	100	35
	6	5	115	43
	7	7	95	54
	8	3	80	28
5	1	7	90	35
	2	5	100	43
	3	6	115	54
	4	3	76	50
	5	4	85	20
	6	3	74	28
	7	5	96	55
	8	6	80	42
	9	4	75	25
6	1	3	97	48
	2	7	64	35
	3	5	76	53
	4	6	84	42
	5	7	100	50
	6	4	60	24
	7	3	86	33
	8	5	97	28
	9	7	88	36

Таблица 19

Исходные данные для задания 2

Вариант задания	**Номер выборки**	**Полная масса автомобиля, кг ($У_1$)**	**Мощность двигателя, кВт ($У_2$)**	**Максимальная скорость, км/ч ($У_3$)**
7	1	1110	30,2	118
	2	1355	47,1	142
	3	1480	55,2	142
	4	1820	69,9	147
	5	3165	161,8	175
	6	3255	220,6	200
8	1	2710	69,9	120
	2	7825	64,6	80
	3	13400	132,4	75
	4	14050	132,4	70
	5	2660	55,2	100
	6	5150	51,5	70
9	1	7400	84,6	80
	2	10525	110,3	90
	3	14950	132,4	85
	4	14950	132,4	75
	5	15305	154,4	80
	6	22600	176,5	68

Таблица 20

Исходные данные для задания 3

Вариант задания	**Номер опыта**	**X1**	**X2**	**X3**	**Вариант задания**	**Номер опыта**	**X1**	**X2**	**X3**
1	1	-	-	-	**6**	1	+	+	+
	2	+	-	-		2	-	-	+
	3	+	-	-		3	+	-	+
	4	-	-	-		4	-	+	+
	5	-	+	-		5	+	+	-
	6	-	+	-		6	-	-	-
	7	+	+	-		7	+	-	-
	8	+	+	-		8	-	+	-
2	1	-	-	+	**7**	1	+	-	-
	2	+	-	-		2	-	-	+
	3	-	+	-		3	-	+	-
	4	+	+	+		4	+	+	+
	5	-	-	-		5	-	+	+
	6	+	-	+		6	+	-	+
	7	-	+	+		7	+	-	-
	8	+	+	-		8	-	+	-
3	1	-	-	-	**8**	1	-	-	-
	2	+	-	+		2	-	+	-
	3	+	-	-		3	-	-	+
	4	-	+	+		4	+	+	-
	5	-	+	-		5	+	-	+
	6	+	+	+		6	+	+	+
	7	+	+	-		7	+	-	-
	8	-	-	+		8	-	+	+
4	1	-	-	-	**9**	1	-	-	-
	2	+	-	-		2	-	-	+
	3	-	+	+		3	+	+	-
	4	+	-	+		4	-	+	-
	5	-	+	-		5	+	-	+
	6	+	+	-		6	+	-	-
	7	-	-	+		7	-	+	+
	8	+	+	+		8	+	+	+
5	1	+	+	+	**10**	1	-	-	-
	2	+	-	+		2	+	-	-
	3	-	-	+		3	-	+	-
	4	-	-	-		4	+	+	-
	5	+	+	-		5	-	-	+
	6	+	-	-		6	+	-	+
	7	-	+	-		7	-	+	+
	8	-	+	+		8	+	+	+

Таблица 21

Исходные данные для задания 4

Вариант задания	Номер опыта	y'	y''	y'''	Вариант задания	Номер опыта	y'	y''	y'''
1	1	80,23	81,93	81,08	**6**	1	0,42	0,41	0,39
	2	86,50	84,80	85,65		2	0,41	0,42	0,42
	3	82,45	82,10	82,27		3	0,39	0,43	0,49
	4	89,50	91,30	90,40		4	0,38	0,43	0,45
	5	85,10	84,80	84,95		5	0,40	0,41	0,38
	6	90,30	89,60	89,95		6	0,49	0,31	0,35
	7	85,60	84,90	85,25		7	0,40	0,39	0,37
	8	88,02	88,48	88,25		8	0,63	0,45	0,43
2	1	87,31	86,01	86,94	**7**	1	2,15	2,19	2,21
	2	92,3	91,8	93,0		2	1,94	1,98	2,07
	3	87,2	88,7	87,6		3	1,85	1,95	1,91
	4	84,0	84,9	84,2		4	1,81	1,88	1,84
	5	86,66	85,8	87,0		5	2,21	2,11	2,13
	6	92,05	92,7	91,9		6	1,80	1,91	1,86
	7	87,85	86,9	87,47		7	1,80	1,74	1,69
	8	87,37	87,75	88,05		8	1,64	1,65	1,70
3	1	0,92	0,91	0,92	**8**	1	1,60	1,59	1,60
	2	0,946	0,935	0,917		2	1,41	1,40	1,38
	3	0,930	0,924	0,910		3	1,54	1,49	1,52
	4	0,890	0,883	0,894		4	1,59	1,52	1,55
	5	0,963	0,958	0,934		5	1,45	1,39	1,41
	6	0,856	0,881	0,864		6	0,84	0,81	0,79
	7	0,938	0,945	0,861		7	0,96	0,92	0,89
	8	0,896	0,910	0,874		8	0,64	0,74	0,61
4	1	0,835	0,851	0,876	**9**	1	0,34	0,38	0,33
	2	0,876	0,906	0,894		2	0,38	0,40	0,37
	3	0,906	0,913	0,909		3	0,44	0,43	0,41
	4	0,89	0,90	0,87		4	0,43	0,42	0,40
	5	0,89	0,906	0,913		5	0,40	0,42	0,43
	6	0,89	0, 89	0,90		6	0,44	0,41	0,45
	7	0,876	0,906	0,894		7	0,34	0,38	0,41
	8	0,816	0,850	0,838		8	0,38	0,35	0,42
5	1	1,54	1,48	1,39	**10**	1	0,37	0,36	0,37
	2	1,62	1,58	1,56		2	0,58	0,54	0,49
	3	1,73	1,71	1,69		3	0,31	0,33	0,35
	4	1,58	1,48	1,53		4	0,35	0,34	0,28
	5	1,64	1,59	1,49		5	0,29	0,31	0,31
	6	1,54	1,48	1,65		6	0,41	0,40	0,39
	7	2,24	2,15	2,20		7	0,39	0,37	0,40
	8	2,26	2,38	2,45		8	0,41	0,38	0,39

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Глубокое изучение технологии и рабочих процессов машин в сочетании с кибернетическими методами исследований (моделирование) представляет собой основу системного подхода к решению наиболее широких научных проблем. Метод системного анализа исследуемых технологических процессов включает оптимальное планирование эксперимента, разработку математической модели и присчитывание этих процессов на ЭВМ с целью их интенсификации путем выбора оптимальных условий, в которых протекает тот или иной процесс.

Таким образом, под планированием эксперимента следует понимать процесс деятельности экспериментатора, заключающийся в выборе такого минимума числа и условий проведения опытов, при котором достигается требуемая точность в решении поставленной задачи.

Методы планирования эксперимента позволяют достаточно эффективно, при невысокой стоимости решать многие практические задачи.

Теория планирования многофакторного эксперимента дает возможность построить математическую модель изучаемого явления, значительно сократить число опытов и достаточно точно оптимизировать параметры объекта исследования.

Библиографический список

1. Адлер, Ю.П., Маркова, Е.В., Грановский, Ю.Б. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст]. – М.: Наука, 1979. - 282 с.
2. Карабцев, В.С., Валеев, Д.Х. Оптимизация бокового обтекателя кабины грузового автомобиля [Текст] // Автомобильная промышленность . – 2005. - № 5. – С. 30-32.
3. Маркин, Н.С. Основы теории обработки результатов измерений [Текст]. - М.: Изд-во стандартов, 1991. – 176 с.
4. Мельников, С.В. и др. Планирование эксперимента в исследовании сельскохозяйственных процессов [Текст]. - Л.: Колос, 1980. – 168 с.
5. Налимов, В.В. Теория эксперимента [Текст]. - М.: Наука, 1971. - 360 с.
6. Налимов, В.В., Чернова, Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов [Текст]. - М.: Наука, 1965. - 430 с.
7. Новицкий, П.В., Зограф, И.А. Оценки погрешностей результатов измерений [Текст]. - Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.
8. Хартман, Е. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов [Текст]. - М.: Мир, 1977. – 560 с.

Чернецкая Наталья Анатольевна

ПЛАНИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения по дисциплинам «Основы научных исследований», «Планирование и математическая обработка результатов экспериментов» по специальностям «Автомобили и автомобильное хозяйство», «Сельскохозяйственные машины и оборудование» и «Автомобиле- и тракторостроение»

Редактор Е.Ф. Изотова
Подготовка оригинала-макета О.В. Щекотихина

Подписано к печати 15.05.09. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 4,93. Тираж 100 экз. Заказ 09-731. Рег. № 43.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института.
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6